Competencias ✣ Aprendizaje ✣ Vida

Segunda edición

MATEMÁTICAS 1

MANUEL RENÉ JIMÉNEZ
ROSA MARÍA ESTRADA CORONADO

Pearson

MATEMÁTICAS 1

Competencias + Aprendizaje + Vida

Segunda edición

MATEMÁTICAS 1

Competencias + Aprendizaje + Vida

Segunda edición

Manuel René Jiménez

Ingeniero Industrial

Instituto Tecnológico de Chihuahua

Rosa María Estrada Coronado

Doctora en Pedagogía

Centro de Investigación e Innovación

Educativa del Noroeste

Revisión técnica

Alicia Castillo Ortiz

Maestra en Administración y Calidad

Instituto Cultural de Occidente, A. C

Coordinadora del Departamento Académico de Preparatoria

Mazatlán, Sinaloa

Juan Antonio Jiménez Gallegos

Doctor en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada

y Tecnología Avanzada

Pearson

Datos de catalogación

Jiménez René, Manuel; Estrada Coronado, Rosa M.

Matemáticas 1

Segunda edición

Pearson Educación de México, S. A. de C. V., 2018

ISBN: 978-607-32-4421-3

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 360

Matemáticas 1

El proyecto educativo *Matematicas 1* es una obra colectiva creada por un equipo de profesionales, quienes cuidaron el nivel y pertinencia de los contenidos, lineamientos y estructuras establecidos por Pearson Educación.

Dirección general: Sergio Fonseca ■ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ■ **Gerencia de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Coordinación de contenidos de Bachillerato:** Lilia Moreno ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Berenice Torruco ■ **Gestor de arte y diseño:** Dulce Lomelí ■ **Edición de desarrollo:** José Huerta ■ **Corrección de estilo:** Juan A. Jiménez ■ **Lecturas de prueba:** María del Carmen Gutiérrez y Antonio J. Gallegos ■ **Revisión técnica:** Alicia Castillo ■ **Diseño de interiores:** Daniel Moreno ■ **Diseño de portada:** Studio 02 ■ **Composición y diagramación:** Ediciones OVA ■ **Imágenes:** Pearson Asset Library.

Contacto: soporte@pearson.com

Segunda edición, 2018

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-4421-3
ISBN E-BOOK: 978-607-32-4430-5

D.R. © 2018 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Avenida Antonio Dovalí Jaime No. 70
Torre B, piso 6, Colonia Zedec, ED Plaza Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, Ciudad de México, C.P. 01210

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

www.pearsonenespañol.com

Impreso en México. Printed in Mexico.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 21 20 19 18

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

Pearson Hispanoamérica

Argentina ■ Belice ■ Bolivia ■ Chile ■ Colombia ■ Costa Rica ■ Cuba ■ Ecuador ■ El Salvador ■ Guatemala
Honduras ■ México ■ Nicaragua ■ Panamá ■ Paraguay ■ Perú ■ República Dominicana ■ Uruguay ■ Venezuela

Presentación

¿Por qué una nueva edición de Competencias+Aprendizaje+Vida?

- Porque queremos facilitar la transición de estudiantes y docentes al nuevo modelo educativo, a través de una propuesta innovadora y vanguardista que contribuya a la formación integral de los estudiantes, fortaleciendo los cuatro pilares que enuncia la Unesco: *aprender a conocer*, *aprender a hacer*, *aprender a vivir juntos* y *aprender a ser*.
- Para promover un punto de encuentro entre las disciplinas a partir de proyectos que fomenten la curiosidad y el análisis de un mundo interconectado e interdependiente. Nuestra propuesta pone a los jóvenes en el centro del aprendizaje para coadyuvar al desarrollo de habilidades socioemocionales y promover el trabajo entre pares, favoreciendo la inclusión y la equidad, así como la responsabilidad y el liderazgo compartidos.
- Esta nueva edición refuerza el uso opcional y dirigido de la tecnología. Si existen las condiciones tecnológicas, los estudiantes tendrán alternativas de presentar numerosas actividades mediante aplicaciones o empleando recursos de la web. Otras veces, podrán realizar diversas actividades a partir de la búsqueda en sitios electrónicos. Este trabajo con la tecnología siempre será complementario y enriquecedor de los aprendizajes de los estudiantes.

¿Por qué estudiar Matemáticas 3?

- Porque facilita el desarrollo del pensamiento lógico-matemático mediante el uso de la geometría plana y trigonometría que permita al estudiante proponer alternativas de solución a situaciones reales o hipotéticas.
- Porque propone una metodología de trabajo que permite que los alumnos correlacionen lo aprendido en la escuela con la vida cotidiana; promueve el desarrollo de las habilidades características del pensamiento lógico-matemático, así como, la capacidad de proponer alternativas de solución a diversos problemas presentes en su entorno desde varios enfoques. Desde contenidos como lugares geométricos en el plano, línea recta, circunferencia, parábola y elipse se introduce al estudiante a conceptos relacionados con sistemas de coordenadas y cónicas para dar solución a problemas que permitan percibir e interpretar su entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico.
- Porque en estas páginas, los jóvenes fortalecen sus competencias para identificar problemas de fenómenos naturales o sociales, mediante la optimización y uso de la tecnología para construir modelos y estudiar sus variaciones de una forma dinámica.

Contenido

Presentación v
Descubre tu libro x
Competencias genéricas xii
Competencias disciplinares básicas xiii
Proyectos xiv
Portafolio de evidencias 1 1

BLOQUE 1 Números y operaciones aritméticas 2

Números 6
Clasificación y propiedades de los números reales 7
Representación de los números reales 8
Operaciones con números reales 10
Leyes de los signos para sumar y restar números reales 12
Reglas para multiplicar y dividir números reales 14
Leyes o reglas de los exponentes 18
Jerarquía (orden) de las operaciones numéricas 19
Mínimo común múltiplo (MCM) y máximo común divisor (MCD) 21
Modelos aritméticos y algebraicos 22

BLOQUE 2 Razones y proporciones 32

Razones y proporciones 36
Porcentajes 36
Conversión de fracciones 37
Razones 40
Variación directa e inversa 43
Proporciones 43
Variación directa 47
Variación inversa 48

BLOQUE 3 Sucesiones y series 56

Búsqueda de patrones 60
Sucesiones y series 61
Aritméticas 61
Sucesiones aritméticas 61
Series aritméticas 64
Geométricas 66
Sucesiones geométricas 66
Series geométricas finitas 71
Series geométricas infinitas 73

BLOQUE 4 Modelos de probabilidad y estadística 82

Conceptos básicos de estadística descriptiva 86
- Medidas de tendencia central 91
  - Media 91
  - Mediana 94
  - Moda 96
- Medidas de dispersión 98
  - Rango 99
  - Varianza 99
  - Desviación típica o estándar 99
- Gráficos 103
  - De pastel 103
  - De barras 103
  - Histograma 103
  - Polígono de frecuencias 104

Probabilidad 108
- Conceptos básicos de probabilidad 109
  - Eventos deterministas y aleatorios 109
  - Espacio muestral 110
  - Eventos 113
  - Complementos, intersecciones y uniones de los eventos 114
  - Definición de probabilidad 118
  - Enfoques de la probabilidad 119
- Leyes de probabilidad 123
  - Ley aditiva 123
  - Ley multiplicativa 125

BLOQUE 5 Operaciones algebraicas 136

Lenguaje algebraico 140
- Conceptos básicos 141
  - Igualdad 141

Leyes de los exponentes y radicales 143
- Notación exponencial 143
- Multiplicación de potencias con la misma base 143
- División de potencias con la misma base 144
- Elevar una potencia a otra potencia 144
- Leyes o reglas de los exponentes 144
- Simplificación de expresiones con exponentes 145
- Radicales 146
- Leyes de los radicales 146
  - Raíz enésima 146
  - Exponentes racionales 148
- Operaciones con polinomios 150
- Términos semejantes 150
  - Signos de agrupación 151

Suma y resta de polinomios 151
Suma de polinomios 152
Resta de polinomios 153
Multiplicación de polinomios 153
Productos notables 155
Cuadrado de un binomio 156
Producto de dos binomios conjugados 157
Regla 157
Producto de dos binomios con un término común 157
Regla 158
Cubo de un binomio 158
Regla 158
Factorización 159
Factor común en un polinomio 160
Factorización por agrupación 161
Factorización de un trinomio cuadrado perfecto 162
Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ 166
Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ 169
Factorización de polinomios que requieren combinar técnicas 171
Fracciones algebraicas 172
División de polinomios 174
Polinomio entre monomio 174
Polinomio entre polinomio 174

BLOQUE 6 Ecuaciones lineales 186

Ecuaciones lineales 190
Una variable 190
Ecuaciones equivalentes 191
Técnicas para resolver ecuaciones lineales 191
Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios 193
Aplicaciones de las ecuaciones lineales 194
Dos variables 198
Sistema coordenado en el plano 198
Relación entre funciones y ecuaciones lineales 200
Uso de la calculadora graficadora y/o una computadora 202
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 205
Tres variables 221
Sistema de ecuaciones lineales de 3×3 221

BLOQUE 7 Ecuaciones cuadráticas 240

Ecuaciones cuadráticas 244
Clasificación 245
Ecuación cuadrática incompleta pura 245
Ecuación cuadrática incompleta mixta 245

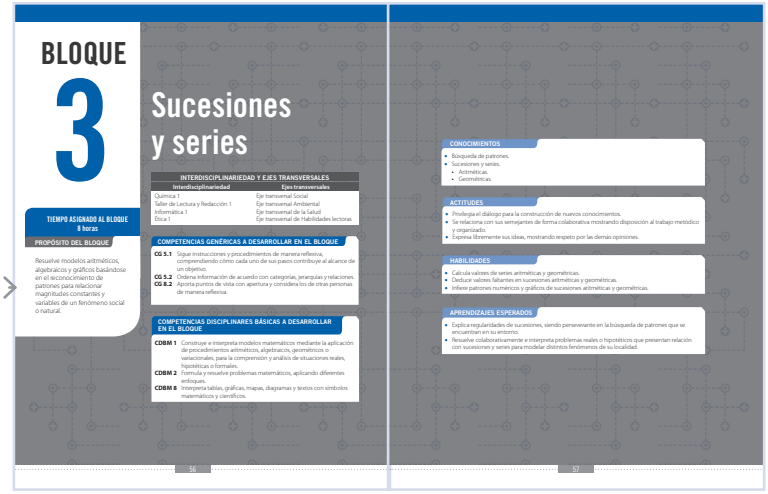
Ecuación cuadrática completa 245
Métodos de solución 246
Propiedad del producto cero 246
Resolución de una ecuación cuadrática completando el trinomio cuadrado perfecto 249
Resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general 251
Resolución de ecuaciones cuadráticas con raíces complejas 254
Estructura de una ecuación cuadrática a partir de soluciones reales y complejas 255
Relación entre las funciones y las ecuaciones cuadráticas 257
Parámetros *a*, *b* y *c* en la función cuadrática 258
Forma estándar de la función cuadrática 259
Raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ 262

Habilidades SocioEmocionales **270**
Proyectos **292**
Recursos didácticos **305**
Modelos de instrumentos de evaluación **309**
Respuestas a ejercicios impares **313**
Bibliografía **325**
Fuentes electrónicas **326**
Heteroevaluaciones **329**
Fórmulas matemáticas **343**

DESCUBRE TU LIBRO

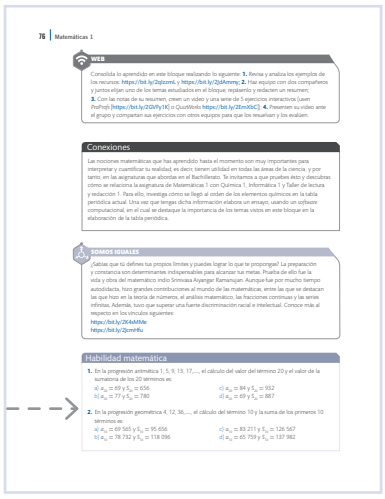
ENTRADA DE BLOQUE

¿Cuál es el propósito de estudiar el bloque? Revisa esta sección y descubre las competencias a desarrollar en el bloque, así como los aprendizajes esperados y su relación con otras disciplinas.



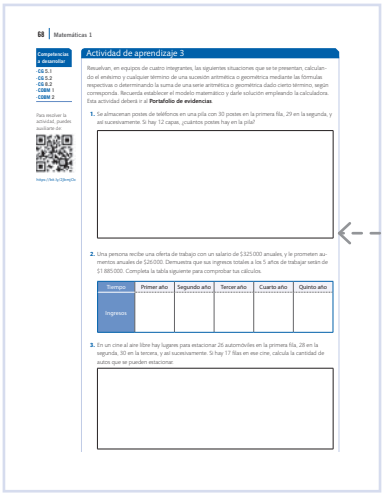
EN ACCIÓN

En esta sección se proponen actividades que te permitirán refl exionar, desarrollar el pensamiento crítico, elegir alternativas y construir soluciones en forma individual y en equipo.



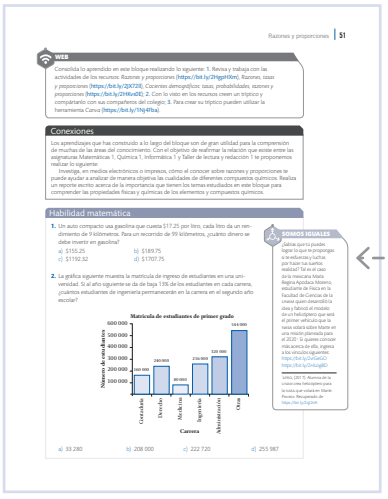
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Las actividades de esta sección pondrán en práctica tus conocimientos y las competencias que estás desarrollando, y serán parte de tu evaluación de cada bloque.



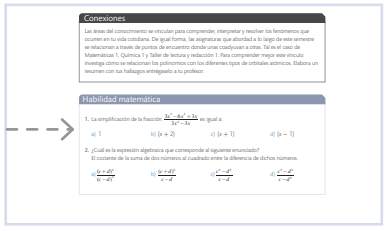
SOMOS IGUALES

En esta sección encontrarás información relevante que te sensibilizará sobre la importancia de la equidad e inclusión en un mundo globalizado.



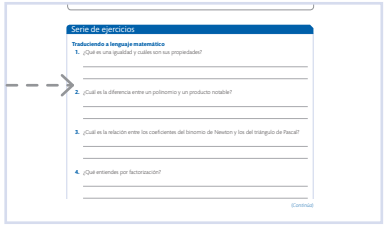
HABILIDAD MATEMÁTICA

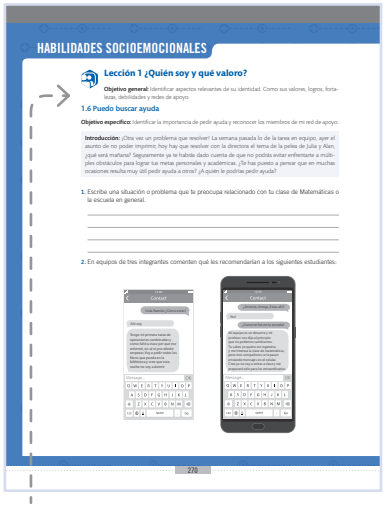
En esta sección encontrarás preguntas con los cuales podrás reforzar la comprensión lectora y matemática.



SERIE DE EJERCICIOS

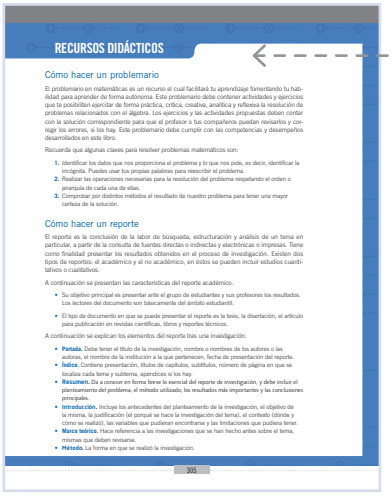
Al final de cada bloque del libro encontrarás una serie de ejercicios que te permitirán poner a prueba lo aprendido en cada aprendizaje esperado.





HABILIDADES SOCIOEMOCIONALES

Es esta sección encontrarás lecciones que te ayudarán en el desarrollo de tus habilidades socioemocionales y competencias.

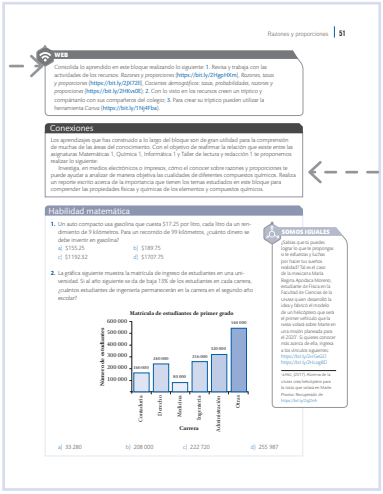


RECURSOS DIDÁCTICOS

En esta sección encontrarás un conjunto de estrategias para elaborar tareas o productos que se solicitaron en las secciones: Actividades de aprendizaje y En acción.

CONEXIONES

Porque no sólo estás estudiando Matemáticas 1, en esta sección encontrarás cómo se relacionan los conocimientos que estás revisando con otras asignaturas y disciplinas.

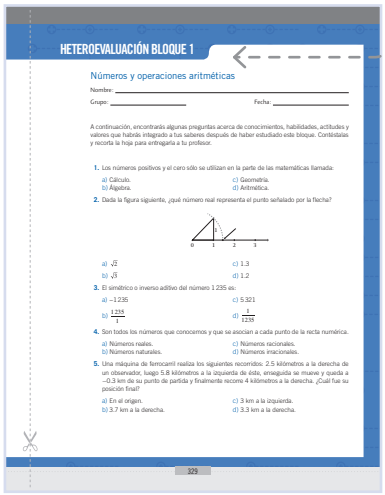


WEB

Aquí encontrarás actividades que te permitirán aprovechar recursos digitales relacionados con los contenidos del bloque, que hemos seleccionado especialmente para ti.

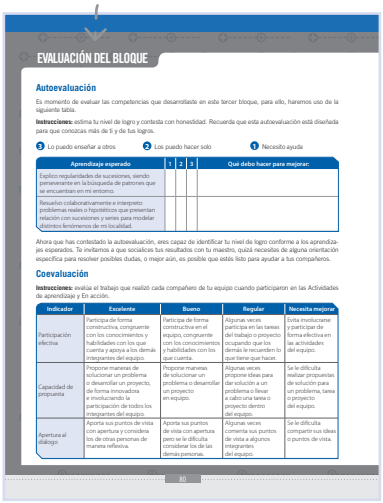
HETEROEVALUACIÓN

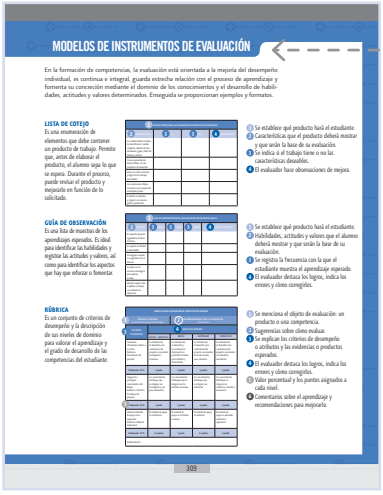
Al final del libro encontrarás una serie de preguntas acerca de los conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás consolidado después de estudiar el bloque correspondiente.



EVALUACIÓN DEL BLOQUE

En esta sección encontrarás un conjunto de estrategias para evaluar tu aprendizaje de los temas del bloque: autoevaluar tu desempeño, el del trabajo en equipo y las actividades de aprendizaje que has realizado.





MODELOS DE INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Hacia el final del libro encontrarás algunos ejemplos de los instrumentos que tu profesor empleará para la evaluación de tus actividades. Pueden servirte también para la coevaluación de tus trabajos en equipo.

Competencias genéricas

1. Se conoce a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables.

Competencias disciplinares básicas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Proyectos

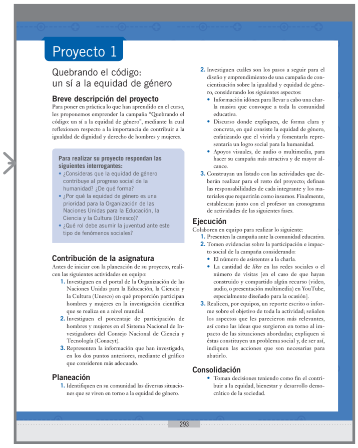
En esta sección encontrarán tres proyectos interdisciplinarios, donde participan todas las asignaturas del semestre a partir de una alineación de los aprendizajes esperados en torno al desarrollo de alguno de los ejes transversales que mencionan los programas de estudios.

La propuesta de trabajo por proyectos se enfoca en aprender "haciendo", esto es, motivar y aplicar el aprendizaje.

Cada proyecto supone un reto para ti. Hemos procurado que el punto de partida sean temáticas significativas, planteadas mediante una actividad creativa, que involucra diversas maneras de aprender y te permita poner en práctica tus competencias.

Los proyectos propuestos son:

Proyecto 1 (página 293). Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos emprender la campaña "Quebrando el código: un sí a la equidad de género", mediante la cual reflexionen respecto a la importancia de contribuir a la igualdad de dignidad y derecho de hombres y mujeres.



Proyecto 1

Quebrando el código: un sí a la equidad de género

Breve descripción del proyecto

Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos emprender la campaña "Quebrando el código: un sí a la equidad de género", mediante la cual reflexionen respecto a la importancia de contribuir a la igualdad de dignidad y derecho de hombres y mujeres.

Para realizar su proyecto respondan las siguientes interrogantes:
- ¿Consideras que la equidad de género contribuye al progreso social de la humanidad? ¿De qué forma?
- ¿Por qué la equidad de género es una prioridad para la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco)?
- ¿Qué rol debe asumir la juventud ante este tipo de fenómenos sociales?

Contribución de la asignatura

Antes de iniciar con la planeación de su proyecto, realicen las siguientes actividades en equipo:
1. Investiguen en el portal de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) en qué proporción participan hombres y mujeres en la investigación científica que se realiza en a nivel mundial.
2. Investiguen el porcentaje de participación de hombres y mujeres en el Sistema Nacional de Investigadores del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).
3. Representen la información que han investigado, en los dos puntos anteriores, mediante el gráfico que consideren más adecuado.

Planeación
1. Identifiquen en su comunidad las diversas situaciones que se viven en torno a la equidad de género.
2. Investiguen cuáles son los pasos a seguir para el diseño y emprendimiento de una campaña de concientización sobre la igualdad y equidad de género, considerando los siguientes aspectos:
   - Información idónea para llevar a cabo una charla masiva que convoque a toda la comunidad educativa.
   - Discurso donde expliquen, de forma clara y concreta, en qué consiste la equidad de género, enfatizando que el vivirla y fomentarla representaría un logro social para la humanidad.
   - Apoyos visuales, de audio o multimedia, para hacer su campaña más atractiva y de mayor alcance.
3. Construyan un listado con las actividades que deberán realizar para el resto del proyecto; definan las responsabilidades de cada integrante y los materiales que requerirán como insumos. Finalmente, establezcan junto con el profesor un cronograma de actividades de las siguientes fases.

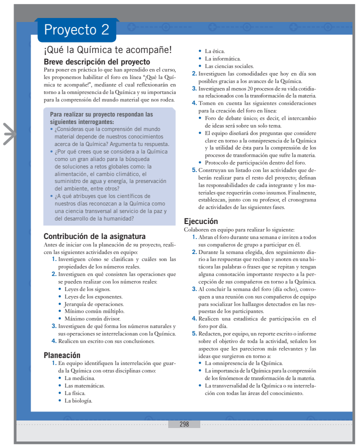
Ejecución

Colaboren en equipo para realizar lo siguiente:
1. Presenten la campaña ante la comunidad educativa.
2. Tomen evidencias sobre la participación e impacto social de la campaña considerando:
   - El número de asistentes a la charla.
   - La cantidad de *likes* en las redes sociales o el número de visitas [en el caso de que hayan construido y compartido algún recurso (video, audio, o presentación multimedia) en YouTube, especialmente diseñado para la ocasión].
3. Realicen, por equipos, un reporte escrito o informe sobre el objetivo de toda la actividad; señalen los aspectos que les parecieron más relevantes, así como las ideas que surgieron en torno al impacto de las situaciones abordadas; expliquen si éstas constituyen un problema social y, de ser así, indiquen las acciones que son necesarias para abatirlo.

Consolidación
- Toman decisiones teniendo como fin el contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.

293

Proyecto 2 (página 298). Aquí les proponemos habilitar el foro en línea "¡Qué la Química te acompañe!", mediante el cual reflexionarán en torno a la omnipresencia de la Química y su importancia para la comprensión del mundo material que nos rodea.



Proyecto 2

¡Qué la Química te acompañe!

Breve descripción del proyecto

Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos habilitar el foro en línea "¡Qué la Química te acompañe!", mediante el cual reflexionarán en torno a la omnipresencia de la Química y su importancia para la comprensión del mundo material que nos rodea.

Para realizar su proyecto respondan las siguientes interrogantes:
- ¿Consideras que la comprensión del mundo material depende de nuestros conocimientos acerca de la Química? Argumenta tu respuesta.
- ¿Por qué crees que se considera a la Química como un gran aliado para la búsqueda de soluciones a retos globales como: la alimentación, el cambio climático, el suministro de agua y energía, la preservación del ambiente, entre otros?
- ¿A qué atribuyes que los científicos de nuestros días reconozcan a la Química como una ciencia transversal al servicio de la paz y del desarrollo de la humanidad?

Contribución de la asignatura

Antes de iniciar con la planeación de su proyecto, realicen las siguientes actividades en equipo:
1. Investiguen cómo se clasifican y cuáles son las propiedades de los números reales.
2. Investiguen en qué consisten las operaciones que se pueden realizar con los números reales:
   - Leyes de los signos.
   - Leyes de los exponentes.
   - Jerarquía de operaciones.
   - Mínimo común múltiplo.
   - Máximo común divisor.
3. Investiguen de qué forma los números naturales y sus operaciones se interrelacionan con la Química.
4. Realicen un escrito con sus conclusiones.

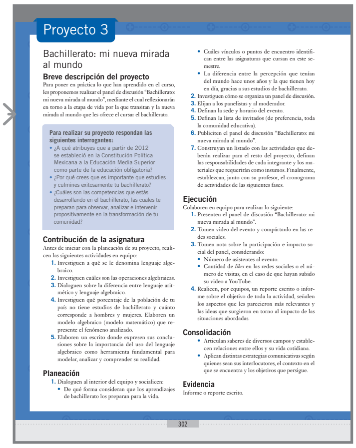
Planeación
1. En equipo identifiquen la interrelación que guarda la Química con otras disciplinas como:
   - La medicina.
   - Las matemáticas.
   - La física.
   - La biología.
   - La ética.
   - La informática.
   - Las ciencias sociales.
2. Investiguen las comodidades que hoy en día son posibles gracias a los avances de la Química.
3. Investiguen al menos 20 procesos de su vida cotidiana relacionados con la transformación de la materia.
4. Tomen en cuenta las siguientes consideraciones para la creación del foro en línea:
   - Foro de debate único; es decir, el intercambio de ideas será sobre un solo tema.
   - El equipo diseñará dos preguntas que considere clave en torno a la omnipresencia de la Química y la utilidad de ésta para la comprensión de los procesos de transformación que sufre la materia.
   - Protocolo de participación dentro del foro.
5. Construyan un listado con las actividades que deberán realizar para el resto del proyecto; definan las responsabilidades de cada integrante y los materiales que requerirán como insumos. Finalmente, establezcan, junto con su profesor, el cronograma de actividades de las siguientes fases.

Ejecución

Colaboren en equipo para realizar lo siguiente:
1. Abran el foro durante una semana e inviten a todos sus compañeros de grupo a participar en él.
2. Durante la semana elegida, den seguimiento diario a las respuestas que reciban y anoten en una bitácora las palabras o frases que se repitan y tengan alguna connotación importante respecto a la percepción de sus compañeros en torno a la Química.
3. Al concluir la semana del foro (día ocho), convoquen a una reunión con sus compañeros de equipo para socializar los hallazgos detectados en las respuestas de los participantes.
4. Realicen una estadística de participación en el foro por día.
5. Redacten, por equipo, un reporte escrito o informe sobre el objetivo de toda la actividad, señalen los aspectos que les parecieron más relevantes y las ideas que surgieron en torno a:
   - La omnipresencia de la Química.
   - La importancia de la Química para la comprensión de los fenómenos de transformación de la materia.
   - La transversalidad de la Química o su interrelación con todas las áreas del conocimiento.

298

Proyecto 3 (página 302). Por último, les proponemos llevar a cabo el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo", mediante el cual reflexionarán en torno a la etapa de vida por la que transitan y la nueva mirada al mundo que les ofrece el cursar el bachillerato.



Proyecto 3

Bachillerato: mi nueva mirada al mundo

Breve descripción del proyecto

Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos realizar el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo", mediante el cual reflexionarán en torno a la etapa de vida por la que transitan y la nueva mirada al mundo que les ofrece el cursar el bachillerato.

Para realizar su proyecto respondan las siguientes interrogantes:
- ¿A qué atribuyes que a partir de 2012 se estableció en la Constitución Política Mexicana a la Educación Media Superior como parte de la educación obligatoria?
- ¿Por qué crees que es importante que estudies y culmines exitosamente tu bachillerato?
- ¿Cuáles son las competencias que estás desarrollando en el bachillerato, las cuales te preparan para observar, analizar e intervenir propositivamente en la transformación de tu comunidad?

Contribución de la asignatura

Antes de iniciar con la planeación de su proyecto, realicen las siguientes actividades en equipo:
1. Investiguen a qué se le denomina lenguaje algebraico.
2. Investiguen cuáles son las operaciones algebraicas.
3. Dialoguen sobre la diferencia entre lenguaje aritmético y lenguaje algebraico.
4. Investiguen qué porcentaje de la población de tu país no tiene estudios de bachillerato y cuánto corresponde a hombres y mujeres. Elaboren un modelo algebraico (modelo matemático) que represente el fenómeno analizado.
5. Elaboren un escrito donde expresen sus conclusiones sobre la importancia del uso del lenguaje algebraico como herramienta fundamental para modelar, analizar y comprender su realidad.

Planeación
1. Dialoguen al interior del equipo y socialicen:
   - De qué forma consideran que los aprendizajes de bachillerato los preparan para la vida.
   - Cuáles vínculos o puntos de encuentro identifican entre las asignaturas que cursan en este semestre.
   - La diferencia entre la percepción que tenían del mundo hace unos años y la que tienen hoy en día, gracias a sus estudios de bachillerato.
2. Investiguen cómo se organiza un panel de discusión.
3. Elijan a los panelistas y al moderador.
4. Definan la sede y horario del evento.
5. Definan la lista de invitados (de preferencia, toda la comunidad educativa).
6. Publiciten el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo".
7. Construyan un listado con las actividades que deberán realizar para el resto del proyecto, definan las responsabilidades de cada integrante y los materiales que requerirán como insumos. Finalmente, establezcan, junto con su profesor, el cronograma de actividades de las siguientes fases.

Ejecución

Colaboren en equipo para realizar lo siguiente:
1. Presenten el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo".
2. Tomen video del evento y compártanlo en las redes sociales.
3. Tomen nota sobre la participación e impacto social del panel, considerando:
   - Número de asistentes al evento.
   - Cantidad de *likes* en las redes sociales o el número de visitas, en el caso de que hayan subido su video a YouTube.
4. Realicen, por equipos, un reporte escrito o informe sobre el objetivo de toda la actividad, señalen los aspectos que les parecieron más relevantes y las ideas que surgieron en torno al impacto de las situaciones abordadas.

Consolidación
- Articulan saberes de diversos campos y establecen relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- Aplican distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.

Evidencia

Informe o reporte escrito.

302

Portafolio de evidencias

A lo largo de este semestre, generarás evidencias como resultado de las actividades que realizarás de manera individual o colaborativa. Intégralas en el **Portafolio de evidencias** de esta materia: te servirá para dar cuenta de tu aprendizaje y será una parte importante de tu evaluación. Consulta en la sección **Evaluación del bloque** qué evidencias te sugerimos incluir en el portafolio. Pregunta a tu profesor si tú puedes proponer algunas otras; el propósito del portafolio es que valores tu propio trabajo y crecimiento a lo largo del curso.

El **Portafolio de evidencias** puede ser revisado por bloque, por bimestre o al finalizar el curso. Para ello, completarás un formato con ayuda de tu profesor. Acuerda con él en qué momento lo harán. Puedes tomar como modelo el siguiente:

Propósito del portafolio de evidencias			Periodo
Demostrar los niveles de logro alcanzados en el desarrollo de las competencias relacionadas con esta asignatura.			**7 bloques**
Asignatura:	**Matemáticas 1**	Nombre del estudiante:	
Criterios de reflexión sobre las evidencias			Comentarios del estudiante
¿Cuáles fueron los motivos para seleccionar las evidencias presentadas?			
¿Qué aprendizajes demuestran las evidencias integradas a este portafolio?			
¿Qué mejoras existen entre las primeras evidencias y las últimas?			
Monitoreo de evidencias			Comentarios del docente
#	Título	Fecha de elaboración	
1			
2			
3			
4			

BLOQUE 1

Números y operaciones aritméticas

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
10 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Resuelve problemas sobre fenómenos cotidianos, mediante procedimientos aritméticos eligiendo de manera crítica las alternativas de solución.

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES

Interdisciplinariedad	Ejes transversales
Química 1 Taller de Lectura y Redacción 1 Informática 1 Ética 1 Metodología de la investigación	Eje transversal Social Eje transversal Ambiental Eje transversal de la Salud Eje transversal de Habilidades lectoras

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
CDBM3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

CONOCIMIENTOS

- Números.
  - Clasificación y propiedades de los números reales.
  - Operaciones con números reales.
    - Leyes de los signos.
    - Leyes de los exponentes.
    - Jerarquía de operaciones.
    - Mínimo común múltiplo.
    - Máximo común divisor.

ACTITUDES

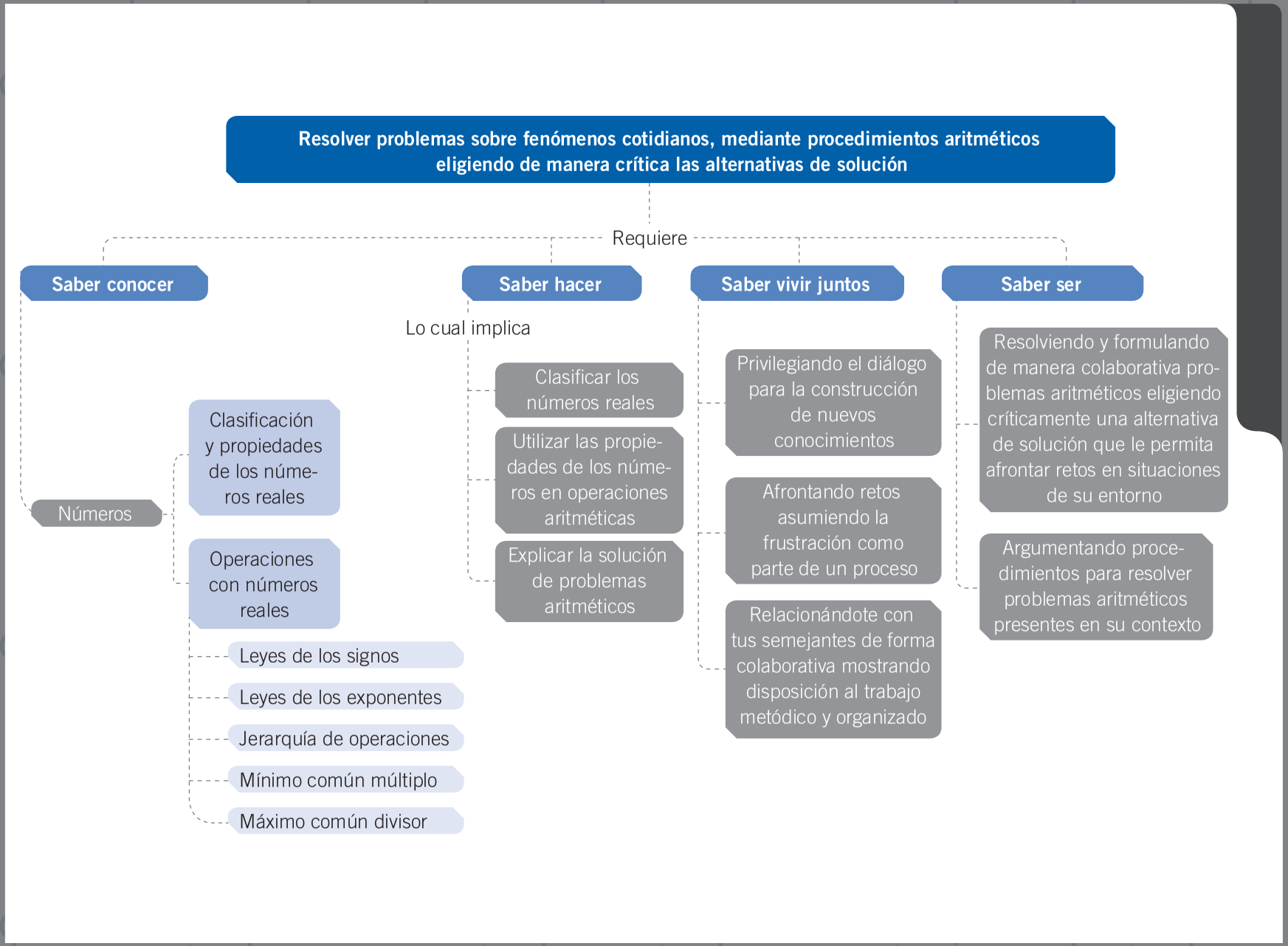
- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos.
- Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

HABILIDADES

- Clasifica los números reales.
- Utiliza las propiedades de los números reales en operaciones aritméticas.
- Explica la solución de problemas aritméticos.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Resuelve y formula de manera colaborativa problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que le permita afrontar retos en situaciones de su entorno.
- Argumenta procedimientos para resolver problemas aritméticos presentes en su contexto.


Resolver problemas sobre fenómenos cotidianos, mediante procedimientos aritméticos eligiendo de manera crítica las alternativas de solución
Requiere
Saber conocer
Saber hacer
Saber vivir juntos
Saber ser
Lo cual implica
Números
Clasificación y propiedades de los números reales
Operaciones con números reales
Leyes de los signos
Leyes de los exponentes
Jerarquía de operaciones
Mínimo común múltiplo
Máximo común divisor
Clasificar los números reales
Utilizar las propiedades de los números en operaciones aritméticas
Explicar la solución de problemas aritméticos
Privilegiando el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos
Afrontando retos asumiendo la frustración como parte de un proceso
Relacionándote con tus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado
Resolviendo y formulando de manera colaborativa problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que le permita afrontar retos en situaciones de su entorno
Argumentando procedimientos para resolver problemas aritméticos presentes en su contexto

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. La suma de dos enteros es un entero, define la propiedad _____.
- a) asociativa
- b) distributiva
- c) clausurativa
- d) conmutativa

2. En la expresión $a+b-2=(a-2)+b$, ¿qué propiedad se define?
- a) Asociativa.
- b) Distributiva.
- c) Clausurativa.
- d) Conmutativa.

3. El mínimo común múltiplo (MCM) de 12, 36 y 48 es:
- a) 72
- b) 48
- c) 288
- d) 144

4. La suma de dos cantidades elevada al cubo es:
- a) $x+y^3$
- b) x^3+y
- c) x^3+y^3
- d) $(x+y)^3$

5. ¿Por qué es tan importante el uso y manejo de los números reales?

6. ¿Cuál es la diferencia entre números racionales y números irracionales?

7. ¿Qué consecuencias pueden presentarse al no aplicar correctamente la jerarquía de operaciones?

8. Los modelos matemáticos, generalmente, se expresan como:

Números

¿Habías pensado alguna vez qué haríamos sin la existencia de los números?, que un número podría ser el causante de grandes aciertos o desaciertos, ¿crees que los números han sido los causantes de las grandes modificaciones en la historia de la humanidad?

En acción

Cierto día de enero, la temperatura que se registró en la ciudad de Tlaxcala, México, fue de +3 grados celsius a las 7 a. m.; luego, alrededor de las 2 p. m., la temperatura se modificó +9 grados, y a las 8 p. m. se registró otro cambio de −5 grados. ¿Cuál fue la temperatura a las 8 p. m.? Utiliza la recta numérica para representar las variaciones que tuvo la temperatura a lo largo del día. Interpreta los datos anotados en la recta numérica y explica cómo ha variado la temperatura a lo largo de las horas. Intenta construir un modelo matemático que describa el proceso.

Pueden trabajar esta actividad con una recta numérica interactiva en línea (https://bit.ly/2HcgRtO), o pueden generar rectas numéricas a la medida (https://bit.ly/2mdWFI9) para luego imprimirlas y trabajar con ellas en clase.

En este bloque iniciaremos el estudio de los números, pero hablar de éstos como tal, tomaría un curso completo y sólo se podrían cubrir las propiedades más importantes de ellos. Por ello, se te proporcionarán las bases más significantes y relevantes requeridas para comprender el universo de los números, así como algunos de los alcances que éstos tienen en tu vida cotidiana.

Los números reales son todos aquellos que conocemos y por tanto, podemos identificar en un lugar determinado dentro de la recta numérica.

Éstos los podemos clasificar de la siguiente manera: *naturales*, *enteros*, *racionales*, *irracionales* y *primos*.

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2

Actividad de aprendizaje 1

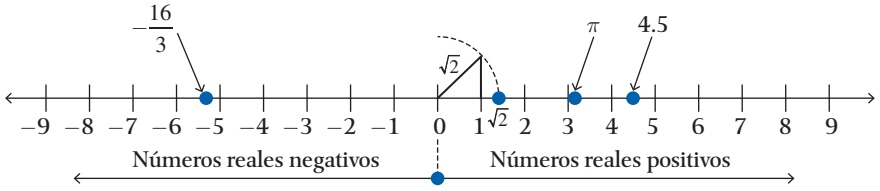
1. Investiguen en equipo de cuatro integrantes, en los medios que tengan a su alcance, los siguientes temas:
   - Números naturales.
   - Números racionales.
   - Números irracionales.
   - Números reales.
   - Números complejos.
2. Elaboren, para cada tipo, una ficha de trabajo con información clara y precisa, con ejemplos de cada tipo de número. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

3. Diseñen, a partir de la investigación realizada, un mapa conceptual en donde organicen la información, haciendo énfasis en la relación entre los diferentes tipos de números.
4. Elaboren cartas de cartón de 2 × 3 pulgadas, aproximadamente, en ellas representarán a los números reales. Enseguida, a través de un juego didáctico (como un memorama, lotería, etc.), identifiquen los números reales (debe ser un juego diferente por equipo).

Trabajen sus fichas de trabajo con las herramientas que ofrece *ProProfs* (https://bit.ly/2GVFy1K) o *Cram* (https://bit.ly/1aYN1Sg); y pueden crear su mapa conceptual con *Gliffy* (https://bit.ly/2H9LuEp).

Clasificación y propiedades de los números reales

Los *números reales* son todos los números que conocemos y que podemos asociar con los puntos gráficos de una recta llamada *recta numérica*. Dichos puntos se dividen en *positivos* y *negativos* según estén a la *derecha* o *izquierda*, respectivamente, de un punto que llamamos origen y que corresponde al cero.



Los números reales se pueden clasificar de la siguiente manera:

Números naturales. Son los enteros positivos que utilizamos desde que aprendimos a contar de forma intuitiva o natural.

$$1, 2, 3, \ldots$$

Números enteros. Son los números enteros negativos, el cero y los enteros positivos.

$$\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Números racionales. Son números reales de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Las representaciones decimales de los números racionales pueden ser finitas o no finitas y repetitivas. Por ejemplo, al realizar la división de los siguientes números, tenemos que:

$$\frac{4}{5} = 0.8, \quad \frac{12}{1} = 12, \quad \frac{177}{55} = 3.2181818\ldots,$$

donde los dígitos 1 y 8 en la representación $\frac{177}{55}$ se repiten en forma indefinida.

Números irracionales. Son números como $\sqrt{2} \approx 1.4142$ o $\pi \approx 3.1416$ que no son racionales, es decir, que no se pueden expresar como cociente de dos enteros. No existe un número racional alguno tal que $a^2 = 2$, pero sí existe un irracional como $\sqrt{2}$, tal que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Números primos. Un entero positivo p diferente de 1 es número primo si sus únicos factores positivos son 1 y p. Por ejemplo, son números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

Ubicación de números reales en la recta numérica

En la recta numérica, los números negativos se ubican a la izquierda del cero; mientras que los positivos se encuentran a la derecha del mismo. Para ubicar la fracción $\frac{a}{b}$, se divide cada unidad entre el número de partes que indica el denominador b y se toman las partes que indica el numerador a.

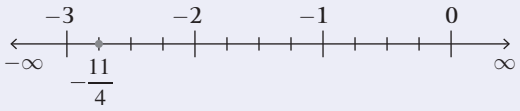
Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Localiza en la recta numérica el número $-\frac{11}{4}$.

Solución

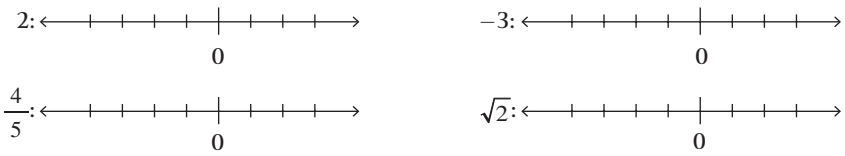
Se divide en 4 partes iguales a las unidades que se encuentran a la izquierda del 0 y se toman 11 de esas divisiones. Es decir:



En acción

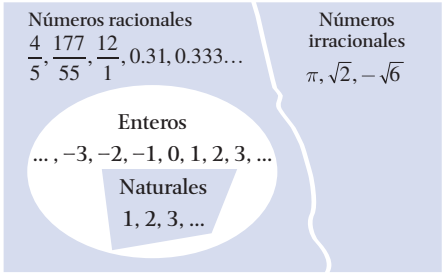
Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

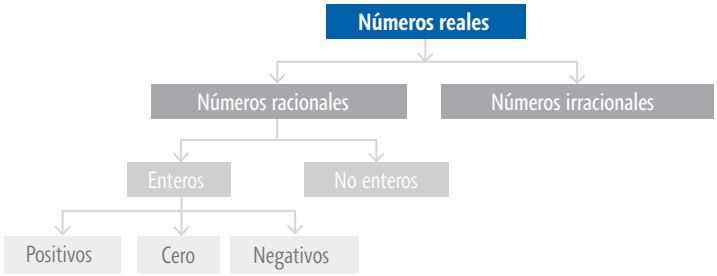
1. Elabora con ayuda de tu profesor fichas de trabajo, las cuales contengan los diferentes tipos de números. Ubica en la recta numérica el número según corresponda y toma nota en tu cuaderno de los aspectos que te ayuden a la mejor comprensión de este tópico.
2. Ubica los siguientes números en la recta numérica.



Para esta actividad también puedes trabajar con una recta numérica interactiva (https://bit.ly/2HcgRtO) o con *GeoGebra* (https://bit.ly/2EZ3rPP), y luego crear tus fichas de trabajo con las herramientas que ofrecen *Quizlet* (https://bit.ly/1kXhvsy) o *Cram* (https://bit.ly/1aYN1Sg). Para utilizar *GeoGebra* como recta numérica, revisa este tutorial: https://bit.ly/2HgcGwY; y para trabajar con *Quizlet* puedes ver: https://bit.ly/2GHCDVX

Representación de los números reales





Ejemplos

1. Clasifica cada número real como natural, entero, racional, o irracional:

a) 0 c) −13 e) 0.202002000
b) $\sqrt{8}$ d) 0.64 f) 0.202002000...

Solución

Número	Clasificación
a) 0	Entero y racional
b) $\sqrt{8}$	Irracional
c) −13	Entero negativo y racional
d) 0.64	Decimal y racional
e) 0.202002000	Racional
f) 0.202002000…	Irracional

2. Utiliza números reales para representar las siguientes cantidades:

a) La temperatura mínima de 6.7 grados celsius *bajo cero* registrada en San Juanito, Chihuahua, México, en 2009.
b) La fecha de nacimiento de una persona registrada 370 años a. C.
c) La altitud del Monte Everest de 8 848 metros sobre el nivel del mar.

Solución

a) −6.7°C b) −370 a. C. c) +8 848 m

Actividad de aprendizaje 2

Competencias a desarrollar

- CG 5.2
- CG 8.2
- CDBM 3

Formen equipos de tres integrantes y aplicando la clasificación de los números reales realicen las siguientes actividades. Recuerden que todos tienen responsabilidad y compromiso de cumplir con la tarea. Por lo que si alguno de ustedes tiene dudas sobre cómo resolver alguna situación, es importante que otro de ustedes, que sí lo comprenda, le explique detenidamente y le dé consejos para que comprenda lo que tiene que hacer en cada caso. A esta dinámica se le conoce como trabajo entre pares. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2Hbnwc1

1. Clasifica cada número real como entero, racional o irracional.

Número	Clasificación	Número	Clasificación
a) $\sqrt{35}$		c) 0.4444…	
b) −177		d) 93	

2. Determina si la proposición es verdadera (**V**) o falsa (**F**) escribiendo la letra correspondiente en la celda de la derecha.

Proposición	V/F
a) Todo número entero es racional.	
b) Un decimal que no se repite y no termina es un número real.	

(Continúa)

(Continuación)

c) Todo número racional es un entero.	
d) Todo decimal que no se repite y no termina es irracional.	
e) La representación decimal de un número real nunca termina y nunca se repite.	

3 Utiliza números reales para escribir las cantidades dadas.

Frase	Cantidad en número
a) La *ganancia* de $82 millones de una empresa.	
b) La profundidad de 316 metros del Mar Muerto *bajo el nivel* del mar.	
c) La temperatura de 3 grados *bajo cero* en Ciudad Madera, Chihuahua, México.	
d) La *pérdida* de $95 000 de un inversionista.	

Al finalizar la actividad conversen dentro del equipo y reflexionen sobre cómo se sintieron cuando otro de sus compañeros les explicaba el proceso a seguir para resolver el caso expuesto, ¿sabías que a esta dinámica se le conoce como trabajo entre pares?

Operaciones con números reales

Anteriormente, iniciamos el estudio de cómo se representan los números reales, es tiempo de profundizar al respecto y conocer un poco más sobre sus operaciones y propiedades fundamentales. Para ello, designaremos a tres de estos números como: a, b y c.

Adición (+) y multiplicación (×)

Operación	Propiedad	Generalidad	Significado
Adición	Conmutativa	$a+b=b+a$	Cuando se suman dos números, el orden es intrascendente.
	Asociativa	$a+(b+c)=(a+b)+c$	Los números se pueden agrupar indistintamente.
	Identidad	$a+0=a$	Sumar cero a cualquier cantidad produce la misma cantidad.
	Inversa o negativa	$a+(-a)=0$	Sumar a una cifra su inverso aditivo da por resultado 0.
Multiplicación	Conmutativa	$ab=ba$	Al multiplicar dos números, el orden carece de importancia.
	Asociativa	$a(bc)=(ab)c$	La agrupación de los términos en la multiplicación es intrascendente.

Multiplicación	Identidad	$a \times 1 = a$	Multiplicar cualquier número por 1 da por resultado el mismo número.
	Inversa o recíproca	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	Multiplicar un número diferente de cero por su recíproco multiplicativo da como resultado 1.
	Distributiva	$a(b+c) = ab + ac$ $(a+b)c = ac + bc$	Multiplicar un número y la suma de dos cifras equivale a multiplicar cada cifra por el número y luego sumar los resultados.

Sustracción (–) y división (÷)

Definición	Significado	Ejemplo
$a - b = a + (-b)$ *a* se llama minuendo *b* se llama sustraendo El resultado de $a - b$ es la resta.	Para restar un número de otro se suma el negativo.	$6 - 14 = 6 + (-14) = -8$
$a \div b = a\left(\frac{1}{b}\right) = a \times b^{-1}$; $b \neq 0$ *a* se llama numerador *b* se llama denominador La **división** de *a* y *b* también suele expresarse como a/b, o bien $\frac{a}{b}$; el resultado se llama *cociente*.	Para dividir un número entre otro diferente de cero, se multiplica por el recíproco. Como 0 no tiene inverso multiplicativo, $\frac{a}{b}$ no está definida para $b = 0$, así que la división entre cero no está definida. Por esa razón, los números reales en la división no tienen propiedad de cerradura.	$15 \div 5 = 15\left(\frac{1}{5}\right) = 15 \times 5^{-1}$

Propiedades de los cocientes

Propiedad	Ejemplo
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si $ad = bc$	$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$ porque $1 \times 12 = 4 \times 3$
$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$	$\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{1}{4}$
$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{3}{-11} = \frac{-3}{11} = -\frac{3}{11}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6+1}{8} = \frac{7}{8}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3 + 7 \times 1}{7 \times 3} = \frac{6+7}{21} = \frac{13}{21}$

(*Continúa*)

(Continuación)

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{9}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{45}{6}$
$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{1}{5}\div\frac{4}{9}=\frac{1}{5}\times\frac{9}{4}=\frac{9}{20}$

Leyes de los signos para sumar y restar números reales

1. Números con el *mismo signo*: suma los números sin considerar el signo y antepón el signo común al resultado.
2. Números con *signos diferentes*: sin considerar el signo, resta el número menor del mayor y coloca el signo del número con mayor valor numérico al resultado.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Suma de números reales con el mismo signo.
   a) $3+9=12$ Se asigna el signo común $+$.
   b) $-3+(-1)=-4$ Se asigna el signo común $-$.

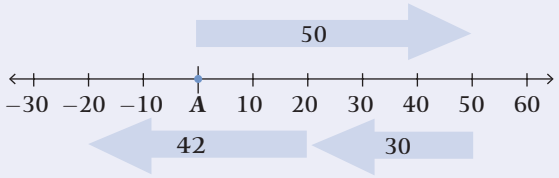
2. Suma de números reales con signos diferentes.
   a) $-4+6=(6-4)=+2$ Se asigna el signo positivo.
   b) $3+(-7)=-(7-3)=-4$ Prevalece el signo negativo.
   c) $-3.6+1.3=-(3.6-1.3)=-2.3$
   d) $-\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=+\left(\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\right)=+\frac{3}{7}$
   e) $\frac{4}{11}+\left(-\frac{7}{11}\right)=-\left(\frac{7}{11}-\frac{4}{11}\right)=-\frac{3}{11}$

3. Resta de números reales.
   a) $8-11=8+(-11)=-(11-8)=-3$ Se suma -11.
   b) $-8-11=-8+(-11)=-(11+8)=-19$
   c) $-8-(-11)=-8+11=+(11-8)=+3$
   d) $-6.4-(-4.7)=-6.4+4.7=-1.7$
   e) $\frac{5}{6}-\left(-\frac{13}{6}\right)=\frac{5}{6}+\frac{13}{6}=\frac{18}{6}=3$

4. Una persona camina 50 m hacia la derecha desde el punto A; enseguida retrocede 30 m en la misma dirección, y luego otros 42. ¿A qué distancia y dirección del punto A se encuentra al final del recorrido?

Solución

En este caso, la recta numérica es de gran utilidad para encontrar la respuesta; el final del recorrido está a 22 m a la izquierda de *A*. Es decir:



Actividad de aprendizaje 3

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CG 8.2
- CDBM 2
- CDBM 3

Resuelvan, en equipos de tres integrantes, las situaciones que se presentan a continuación. Utilicen las leyes de los signos para la suma. Recuerden que es un trabajo entre pares, no olviden dar retroalimentación de lo acontecido durante la solución de esta actividad, la cual deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Escriban a la derecha de cada igualdad la propiedad correspondiente.

Igualdad	Propiedad
$x+9=9+x$	
$7+0=7$	
$63+(-63)=0$	
$x+y+8=(x+8)+y$	
$5x=x(5)$	
$1a=a$	
$x(yz)=(yz)x$	
$(x+y)(w+z)=x(w+z)+y(w+z)$	

2. Escriban a la izquierda un ejemplo de cada propiedad indicada.

Igualdad	Propiedad
	Conmutativa de la adición
	Conmutativa de la multiplicación
	Asociativa de la adición
	Identidad de la adición
	Inversa de la multiplicación
	Asociativa de la multiplicación
	Distributiva de la multiplicación
	Identidad de la multiplicación

(Continúa)

(Continuación)

3. Efectúen las operaciones indicadas.

a) $3+3=$	b) $(-6)+4=$	c) $7+(-2)=$
d) $(-7)+(-8)=$	e) $5+(-5)=$	f) $(-22)+16=$
g) $13+(-9)=$	h) $-15+6=$	i) $(-14)+(+4)=$
j) $-2.3+4.4=$	k) $-6.3+(1.7)=$	l) $-7.6+(-9.2)=$
m) $-1.9+5.2=$	n) $2.6+(-8.3)=$	o) $-7.5+(-9.6)=$
p) $-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}=$	q) $-\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=$	r) $-\frac{9}{13}+\left(-\frac{17}{13}\right)=$
s) $-\frac{1}{8}+\frac{4}{5}=$	t) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{9}\right)=$	u) $-\frac{8}{7}+\frac{1}{10}=$

4. El tipo de cambio del dólar estadounidense respecto al peso mexicano a principios de diciembre de 2017 fue de 17.88 pesos por dólar. A lo largo de ese mes registró las siguientes variaciones: +0.13, −0.04, +0.23, +0.46. Completen la tabla siguiente para conocer el precio del dólar después de cada variación.

Número de variaciones	1	2	3	4	5
Precio antes de la variación	$17.88				
Variación	+0.13				
Precio del dólar después de la variación					

5. En cierta región del desierto de Sonora, México, la temperatura más alta que se ha registrado es de +56.7°C. Por otra parte, la temperatura más baja registrada ha sido de −8.3°C. Encuentren la diferencia entre estas dos temperaturas.

GLOSARIO

Producto. Cantidad que se obtiene como resultado de la multiplicación.
Cociente. Resultado de dividir un número entre otro.

Reglas para multiplicar y dividir números reales

1. Cuando se multiplican o se dividen dos números con los *mismos signos*, el **producto** y el **cociente**, respectivamente, son positivos.
2. Cuando se multiplican o se dividen dos números con *signos diferentes*, el producto y el cociente, respectivamente, son negativos.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Determinación de productos.

a) $3\times 6=18$ Tienen el mismo signo; el producto es positivo.

b) $6\times(-2)=-12$ Signos diferentes; el producto es negativo.

c) $(-5)(-8)=+40$ Signos iguales; el producto es positivo.

d) $(6.4)(-1.8)=-11.52$

e) $(-2.3)(-3.9)=+8.97$

f) $\left(-\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{7}\right)=-\frac{12}{63}$

2. Determinación de cocientes.

a) $\frac{28}{4}=7$ Signos iguales; el cociente es positivo.

b) $32\div(-4)=-8$ Signos diferentes; el cociente es negativo.

c) $\frac{-18}{-6}=3$ Signos iguales; el cociente es positivo.

d) $\frac{2}{0}=\infty$ Esto significa que $\frac{2}{0}$ no está definido, no existe.

e) $\frac{4}{5}\div\left(-\frac{7}{11}\right)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{11}{7}\right)=-\frac{44}{35}$ Se multiplica por el recíproco.

3. Una persona come un trozo de carne y dos rebanadas de pan que le proporcionan 110 y 90 calorías, respectivamente. Si un atleta consume 15 calorías por cada minuto que corre, y realiza una carrera durante 37 minutos, ¿cuál es su ganancia o pérdida de calorías?

Solución

$$\text{Calorías ganadas} = +110\,\frac{\text{cal}}{\text{trozo}}\times 1\ \text{trozo} + 90\frac{\text{cal}}{\text{pan}}\times 2\ \text{panes} = 290\ \text{cal}$$

$$\text{Calorías perdidas} = -15\,\frac{\text{cal}}{\text{minuto}}\times 37\ \text{minutos} = -555\ \text{cal}$$

$$\text{Resultado} = 290\ \text{cal} + (-555)\ \text{cal} = -265\ \text{cal}$$

Actividad de aprendizaje 4

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CDBM 2
- CDBM 3

Resuelve las situaciones que se presentan a continuación. En ellas debes aplicar las leyes de los signos para la multiplicación. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Responde correctamente lo que se te indica:

a) $(-5)\times 7=$	b) $6\times(-2)(-8)=$	c) $3(-9)=$
d) $(-1.8)(-4.6)=$	e) $7.4(-3.1)=$	f) $(-27)15=$
g) $9.3(-2)=$	h) $-17(3.3)=$	i) $(-25)\div(+6)=$

(Continúa)

(Continuación)

j) $-36 \div 9 =$	k) $-0 \div 5 =$	l) $-14 \div 0 =$
m) $0 \div 2 =$	n) $-40 \div (-8) =$	o) $28 \div (-7) =$
p) $\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{6}{5} =$	q) $\frac{5}{6}\left(\frac{4}{9}\right) =$	r) $-\frac{12}{17}\left(-\frac{23}{17}\right) =$
s) $-\frac{4}{7} \div \frac{9}{2} =$	t) $-\frac{8}{11} \div \left(-\frac{10}{13}\right) =$	u) $-\frac{8}{15} \div \frac{19}{15} =$

2. Una persona come tres trozos de carne, cada uno de los cuales le proporcionan 100 calorías. Al nadar, consume 11 calorías por minuto, y nada durante 20 minutos. ¿Cuántas calorías ganó o perdió?

3. Un velocista come dos trozos de carne que, en conjunto, le aportan 220 calorías. ¿Cuántos minutos tendrá que correr para consumir las calorías que le aporta esa ración? Nota: recuerda que el consumo de calorías al correr es de 15 calorías por minuto.

4. Cierta motocicleta puede alcanzar su máxima aceleración de 0 a 100 kilómetros por hora en 2.7 segundos. ¿Cuál fue su **aceleración media**?

5. El costo de una llamada en una compañía de teléfonos celulares es de $3.25 por minuto los primeros 3 minutos, y de $0.55 por cada minuto adicional. ¿Cuál es el costo de una llamada de 7 minutos?

GLOSARIO

Aceleración media. Cambio de la velocidad con respecto al tiempo, se determina con la fórmula:

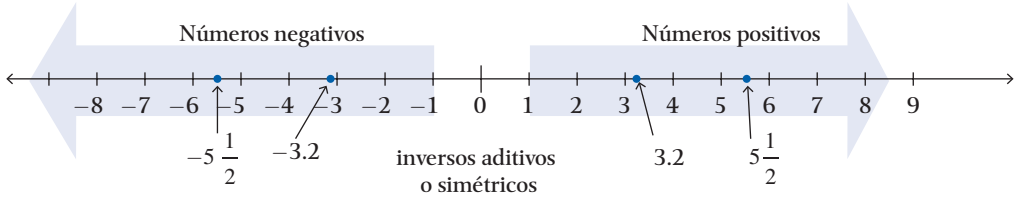
$$\underbrace{a}_{\text{Aceleración}} = \frac{\overbrace{v}^{\text{Velocidad final}} - \overbrace{v_0}^{\text{Velocidad inicial}}}{\underbrace{t}_{\text{Tiempo}}}$$

6. El costo de tres libros diferentes para un estudiante de bachillerato fue de $235, $116 y $284. ¿Cuál es el precio promedio por libro?

Para reafirmar tu comprensión de las operaciones con números reales, te sugerimos ver: "Multiplicación de enteros" (https://bit.ly/2Hc16Hm) y "División de enteros" (https://bit.ly/2HMQwUw). Adicionalmente, puedes transformar las actividades del libro en actividades interactivas con ayuda de las herramientas de *QuizWorks* (https://bit.ly/2ErnXbC).

Simétricos o inversos aditivos de los números reales

En la recta numérica podemos observar que por cada *número positivo* existe un número *simétrico negativo*; estos números se llaman *inversos aditivos* o *simétricos*.



Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número a se indica con el símbolo $|a|$ y denota el número de unidades entre el origen y la magnitud de a sin tomar en cuenta la dirección. El valor absoluto se define como sigue:

si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$ | si $a < 0$, entonces $|a| = -a$

Ejemplos

1. $|8| = 8$, porque $8 > 0$
2. $|-8| = -(-8) = 8$, porque $-8 < 0$
3. $|\sqrt{8} - 8| = 8 - \sqrt{8}$, porque $8 - \sqrt{8} > 0$
4. $|\sqrt{8} - 8| = -(\sqrt{8} - 8)$, porque $\sqrt{8} - 8 < 0$

En general, se puede decir que $|a| = |-a|$ para todo número real a.

Relaciones de orden entre números reales

1. Si a es positivo, entonces $-a$ es negativo.
2. Si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.

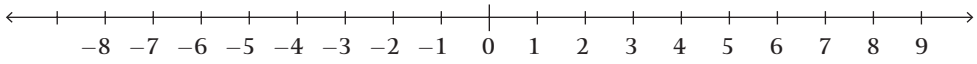
En la siguiente tabla definimos las relaciones posibles que se pueden dar entre dos números reales a y b. Como observarás, se incluyen los símbolos **mayor que** ($>$) y **menor que** ($<$). Estas relaciones se llaman **desigualdades**.

Notación	Definición	Terminología
$a > b$	$a - b$ es positivo	a es mayor que b
$a < b$	$a - b$ es negativo	a es menor que b

En acción

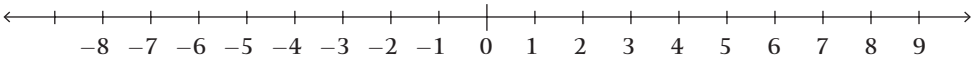
Pon en acción tus conocimientos y realiza los ejercicios que se presentan a continuación.

1. Marca con un punto y escribe los números simétricos de -6, 8, $-4\frac{3}{4}$, 3.3 y $-\sqrt{4}$ en la siguiente recta numérica.



2. Encuentra en la recta numérica los valores siguientes:

a) $|-4|$ b) $\left|-\frac{6}{5}\right|$ c) $|2.2|$ d) $|-4|$ e) $\left|-2\frac{1}{4}\right|$



3. Completa la tabla siguiente.

Notación	Definición	Terminología
$6 > 3$	porque $6 - 3$ es positivo	6 es mayor que 3
$7 < 11$		
		1 es menor que 3
	porque $2 - 4$ es negativo	
$-8 < -2$		

Para esta actividad pueden usar rectas numéricas interactivas en línea (https://bit.ly/2HcgRtO), o pueden generar rectas numéricas a la medida (https://bit.ly/2mdWFI9) para luego imprimirlas y trabajar con ellas en clase.

Leyes o reglas de los exponentes

La **Tabla 1.1** contiene las leyes de los exponentes y es esencial conocerlas para desarrollar sin dificultades nuestro trabajo. Consideramos que a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

Tabla 1.1 Leyes de los exponentes.

Ley	Descripción	Ejemplo
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	Si multiplicamos dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.	$3^2 \times 3^3 = 3^5 = 243$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias con la misma base, restamos sus exponentes.	$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a una nueva se multiplican los exponentes.	$(b^2)^4 = b^{2\times4} = b^8$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada factor a la potencia.	$(3y)^2 = 3^2 y^2 = 9y^2$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Para elevar un cociente a una potencia, se eleva tanto el numerador como el denominador a la potencia.	$\left(\frac{x}{6}\right)^4 = \frac{x^4}{6^4} = \frac{x^4}{1296}$
6. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	Para mover del numerador al denominador o del denominador al numerador un número elevado a una potencia, se cambia el signo del exponente.	$\frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{1}{x^n} \times \frac{y^m}{1} = \frac{y^m}{x^n}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, se invierte la fracción y se cambia el signo del exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} \times \frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n}$

Jerarquía (orden) de las operaciones numéricas

Las operaciones básicas que nos permiten hacer cálculos numéricos en matemáticas y combinar los números se llaman: *adición* $(+)$, *sustracción* $(-)$, *multiplicación* $(\times)$, *división* $(\div)$. Para realizar correctamente las operaciones matemáticas, es necesario jerarquizar su operatividad de la siguiente manera:

1. Se realizan las operaciones que están entre paréntesis de adentro hacia afuera.
2. Se evalúan todos los exponentes.
3. Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
4. Finalmente, se ejecutan la suma y la resta, también de izquierda a derecha.

Ejemplo

Calcula el valor de las siguientes expresiones matemáticas.

a) $4-6+(5\times9)$

b) $[33-(3+7)-8]\div5$

Solución

a) $4-6+(5\times9) = 4-6+45$
$= 43$

Primero, se multiplica 5×9.
Se resta y se suma.

b) $[33-(3+7)-8]\div5 = [33-10-8]\div5$
$= 15\div5$
$= 3$

Se suma $3+7$ y se elimina el paréntesis.
Se restan 10 y 8 de 33 y se elimina el corchete.
Se divide 15 entre 5.

WEB

Para repasar y practicar la jerarquía de las operaciones numéricas, te recomendamos que explores los siguientes vínculos:
https://bit.ly/2qHWs99
https://bit.ly/2HaAxlV

Competencias a desarrollar

- **CG 5.1**
- **CDBM 2**
- **CDBM 3**

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2EWNY2U

Actividad de aprendizaje 5

Resuelvan, en binas, las actividades que se presentan a continuación. Posteriormente, cada equipo propondrá dos o tres ejemplos para que el resto del grupo determine la solución.

1. Efectúa las operaciones necesarias y complementa la tabla siguiente.

Problema	Resultado
a) Obtén el valor de la expresión $7+4(67-11)-24$.	
b) Calcula el valor de la expresión $5[(11-5)+12-19]$.	
c) Encuentra el valor de la expresión $48\div 4^2-2+13$.	
d) Calcula el valor de la expresión $12\times 3\div 6-8(7-5)+12\div 4$.	
e) 260 kilómetros por hora en metros por segundo es	
f) ¿A cuánto equivalen 24.5 litros en cm^3?	

2. Identifica y relaciona los siguientes conceptos: área, dinero, velocidad, volumen, Pitágoras, anualidad, interés, radio, π, lado al cubo, desplazamiento, tiempo, catetos e hipotenusa. Una vez que has realizado las relaciones encuentra un modelo algebraico que las represente. Por ejemplo: densidad, volumen, masa; su modelo algebraico sería:

$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{m}{V}$$

En acción

Investiga los datos propuestos a continuación:

1. La elevación sobre el nivel del mar del Monte Everest.

2. La profundidad del Mar Caspio bajo el nivel del mar.

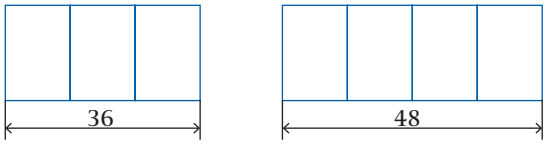
3. La temperatura de congelación del agua en grados fahrenheit.

¿De qué forma crees que se relacionan las matemáticas con las situaciones que investigaste?

Mínimo común múltiplo (MCM) y máximo común divisor (MCD)

Reflexionemos la siguiente situación:

Una modista tiene dos cortes de tela de 36 y 48 m, respectivamente, y quiere dividirlos en trozos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada trozo?



Una forma práctica de encontrar la solución de la situación anterior es descomponer primero los números implicados en sus **factores primos**.

Los factores primos de un número se encuentran al dividir el número compuesto entre el menor de sus factores primos y así sucesivamente hasta llegar a la unidad. Por ejemplo, descompongamos 36 y 48 en sus factores primos.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Los factores primos de 36 son

$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2 = 36$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Los factores primos de 48 son

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3 = 48$

Mínimo común múltiplo (MCM). Es el menor de los múltiplos enteros comunes a un grupo de números compuestos, es decir, es el número menor que puede dividirse exactamente entre todos esos números. Por ejemplo, el MCM de 36 y 48 se obtiene multiplicando todos los factores primos de ambos.

36	48	2
18	24	2
9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1	1	

El MCM de 36 y 48 es $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = 144$

Máximo común divisor (MCD)**.** Es el número mayor de los divisores enteros comunes a esos números. Por ejemplo, el máximo común divisor de 36 y 48 se obtiene de la siguiente manera.

Se descomponen los números simultáneamente en sus factores primos y enseguida se buscan los factores que tengan en común los números descompuestos; el producto de éstos es el MCD.

36	48	2
18	24	2
9	12	2
9	6	2
3	3	3
1	1	3
	1	

El MCD de 36 y 48 es $2^2 \times 3 = 12$ y es la respuesta a la situación anterior.

Esto significa que cada trozo de tela recortado debe medir 12 metros.

Modelos aritméticos y algebraicos

Aunque es probable que ya estés familiarizado con las expresiones algebraicas, vamos a señalar de nuevo que, para representar las cantidades, en álgebra se utilizan *números* y *letras*, a diferencia de la aritmética, que sólo utiliza números.

Variables y expresiones algebraicas

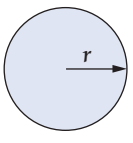
Las *variables algebraicas* son expresiones que sirven para representar los cambios de valor que pueden adquirir las cantidades en un proceso de análisis.

Una *expresión algebraica* es la consecuencia de la generalización que hace el álgebra al utilizar letras y números, al tiempo que representa las cantidades y las operaciones entre éstas; también suelen llamarse *fórmulas algebraicas*.

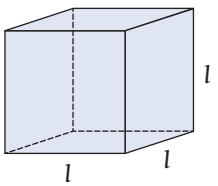
Ejemplo

Expresión simbólica	Enunciado verbal
$7x^2$	Representa una regla que eleva al cuadrado una cantidad y la multiplica por 7.
$b \times h$	Es el producto de dos cantidades.
x^3	El cubo de una cantidad.
$(a+b)^2$	La suma de dos cantidades elevada al cuadrado.
$(x+y)(x-y)$	El producto de la suma por la resta de dos cantidades.
$\sqrt{x}$	La raíz cuadrada de una cantidad.
$\frac{a}{b}$	La división de dos cantidades.

Las expresiones algebraicas nos sirven para representar áreas o volúmenes, procesos económicos, comportamientos de la naturaleza, y muchos otros fenómenos y situaciones, como estudiaremos más adelante. Tal como se muestra a continuación.



$Área = \pi r^2$



$Volumen = l^3$

Velocidad de un móvil

$v = \frac{s}{t}$

Intereses devengados por un capital

$A = P(1+i)^n$

Valor numérico de una expresión algebraica

Cuando en una expresión algebraica sustituimos las variables por números y efectuamos las operaciones correspondientes, lo que estamos haciendo es calcular el *valor numérico de la expresión.*

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Si se invierten P pesos al r por ciento, la cantidad de dinero A al término de un año es:

$$A = P(1 + r)$$

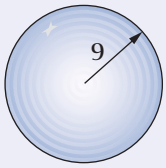
¿Cuánto dinero se acumulará al final del año, si la inversión inicial P es de \$3 300 a una tasa de interés r del 5.8%?

Solución

Si en la expresión $A = P(1 + r)$ sustituimos P por 3 300, y r por 0.058, obtenemos el valor numérico de A:

$$A = 3\,300(1 + 0.058) = 3\,491.40 \text{ pesos}$$

2. La fórmula para calcular el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentra el volumen de una esfera de radio 9.



Solución

$$V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = 972\pi \qquad \text{Sustituimos } r \text{ por } 9.$$

3. La conversión de grados celsius a grados fahrenheit se realiza mediante la fórmula:

$$°\text{F} = \frac{9}{5}°\text{C} + 32$$

Convierte 23°C a la escala fahrenheit.

Solución

$$°\text{F} = \frac{9}{5}(23°\text{C}) + 32 = 73.4°\text{F}$$

WEB

Lee la información del siguiente vínculo:
https://bit.ly/2EYR5aw
y resuelve los ejercicios ubicados en:
http://bit.ly/2JVgQfP

En acción

Realicen, en equipos de tres integrantes, las situaciones que se presentan a continuación. Recuerden que todos tienen responsabilidad y compromiso de cumplir con la tarea. Por lo que si alguno de ustedes tiene dudas sobre cómo resolver alguna situación, es importante que otro de ustedes, que sí lo comprenda, le explique detenidamente y le dé consejos para que comprenda lo que tiene que hacer en cada caso. A esta dinámica se le conoce como trabajo entre pares.

1. En la tabla siguiente se presenta una serie de situaciones que pueden representarse a través de modelos algebraicos. Analiza y resuelve los ejercicios tomando como base los ejemplos que se han abordado en páginas anteriores.

Enunciado	Expresión
a) La suma de $4x$ y 28.	
b) Cinco octavos de una cantidad y menos 7.	

(Continúa)

(Continuación)

c) Una cantidad x disminuida por 3 más 10 veces la cantidad.	
d) La suma de p y q dividida entre la diferencia de p y q.	
e) El área A de un rectángulo es el producto de su base b por su altura h.	
f) La superficie S de una esfera de radio r.	
g) El cociente de x entre la suma de a más b.	
h) El voltaje V de un circuito eléctrico es el producto de la corriente I por su resistencia R.	
i) La presión P de un fluido en un recipiente es la fuerza F que ejerce sobre el área A.	
j) La utilidad total P_t es igual al ingreso total R_t menos el costo total C_t.	
k) La temperatura en grados celsius (°C) es cinco novenos de la resta de los grados fahrenheit (°F) menos treinta y dos.	

2. Sustituyan el valor de las variables dadas y utilicen la calculadora para obtener el valor de cada una de las expresiones algebraicas siguientes. Inventen dos ejemplos y preséntenlos ante el grupo.

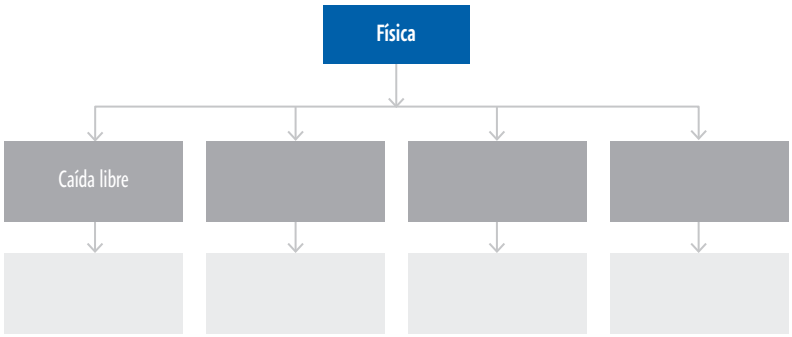
Enunciado	Expresión	Valor
a) Cantidad de dinero A acumulado al final del año de un capital $P = \$1\,520$ con una tasa de interés $r = 10\%$ anual.	$A = P(1+r)$	
b) La equivalencia de 100 grados celsius en grados fahrenheit.	$°\mathrm{F} = \frac{9}{5}°\mathrm{C} + 32$	
c) El volumen de un cubo con lados de 5 centímetros.	$V = l^3$	
d) El desplazamiento s de un móvil que se desplaza con una velocidad constante $v = 100$ m/s en un tiempo t de 10 segundos.	$s = vt$	
e) El radio r de un círculo de perímetro $P = 100$ centímetros.	$r = \frac{p}{2\pi}$	
f) La hipotenusa h de un triángulo rectángulo cuyos catetos a y b miden 5 y 7 respectivamente.	$h = \sqrt{a^2 + b^2}$	

Al finalizar la actividad reflexionen sobre cómo se sintieron al apoyar o ser apoyado por uno de sus pares.

En acción

En equipos de tres integrantes realicen las siguientes actividades.

1. El siguiente diagrama muestra tres niveles, el primero corresponde a la Física y el segundo a conceptos que tienen que ver con la física, pero que están relacionados con las matemáticas, completen los rectángulos del segundo nivel y en el tercer nivel escriban el modelo algebraico que corresponda a cada uno de ellos.



2. Visiten tiendas departamentales o de electrónicos para consultar los precios originales de algunos artículos que estén en oferta, con esa información deberán formular situaciones en las que se verifiquen tales descuentos y que pongan en juego los temas estudiados a lo largo del bloque. Entregarán a su profesor un problemario en el que describan el proceso de solución del problema, además de argumentar cómo se emplea el tema elegido para dicho problema.

WEB

Consolida lo aprendido en el bloque realizando lo siguiente: **1**. Navega por el siguiente vínculo de internet, en el cual puedes revisar los recursos: *Significado de los números* reales (https://bit.ly/2EYwSBU). **2.** Revisa y trabaja con las actividades de los recursos *Operaciones básicas por orden de prioridad* (https://bit.ly/2qHWs99) y *Operaciones básicas con signos de agrupación* (https://bit.ly/2HaAxlV). **3.** Haz equipo con dos compañeros y juntos resuelvan los ejercicios que se proponen en estos recursos. **4.** Con lo visto, creen una actividad de 5 ejercicios, en la cual puedan relacionar columnas. **5.** Utilicen las herramientas de *EducaPlay* (https://bit.ly/2HsIW14), que permiten crear actividades de relacionar columnas. **6.** Presenten su actividad ante el grupo y desafíen a otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Conexiones

Todas las disciplinas del conocimiento están unidas como las ramificaciones de un árbol, donde algunas en mayor o menor medida necesitan una de la otra. Es momento de habilitar el vínculo que existe entre las asignaturas de Matemáticas 1, Química 1, Taller de Lectura y Redacción 1 e Informática 1.

1. Utiliza los pasos del método científico, que te enseñaron en el curso de Química 1, para estudiar la importancia que tienen los números y sus propiedades en alguna de las siguientes actividades de la vida cotidiana.

(Continúa)

(Continuación)

- Trasladarse de la casa a la escuela.
- Surtir la despensa.
- Planificar vacaciones.
- La cantidad de contaminantes que existen en tu ciudad.

2. Interactúa con tus familiares a fin de recabar información que sea de utilidad para que puedas preparar una exposición acerca de la actividad anteriror de tu elección. No olvides tener en cuenta los elementos del proceso comunicativo.

- Emisor.
- Receptor.
- Mensaje.
- Canal.
- Código.
- Retroalimentación.

3. Recuerda utilizar el procesador de textos y presentador de tu preferencia.

Habilidad matemática

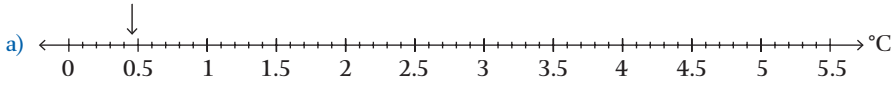
1. En una fiesta de cumpleaños, la animadora hace un juego con los niños en el que les da un minuto para comer una dona que cuelga frente a ellos, sin utilizar las manos. La animadora registra en fracciones de tiempo empleado por cada niño para comerse la dona y, con base en ello, premia los cuatro primeros lugares.

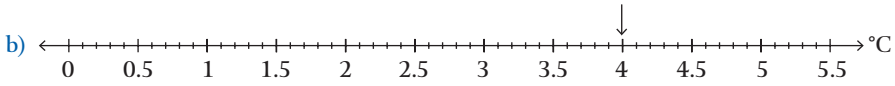
Ordene de menor a mayor el tiempo que tardaron los cuatro niños en comerse la dona para que la animadora otorgue los premios.

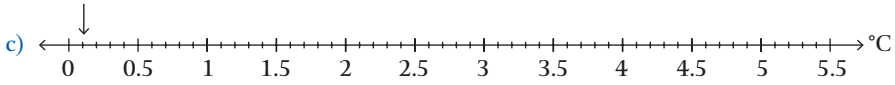
a) 1, 2, 3, 4
b) 2, 4, 1, 3
c) 3, 1, 4, 2
d) 4,3, 2, 1

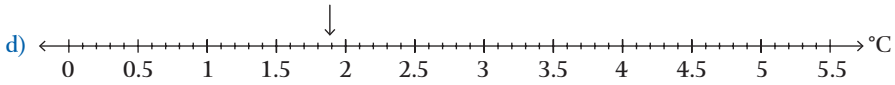
Tiempo de cada niño	1.	2.	3.	4.
	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{7}$

2. La temperatura registrada en una ciudad a las 3 a. m. fue de 0.9°C. Si para las 4 a. m. la temperatura se redujo a la mitad, ¿en cuál de las siguientes rectas numéricas se ubica la temperatura registrada a las 4 a. m.?

a) 

b) 

c) 

d) 

SOMOS IGUALES

"Lo importante es fijarse metas y luchar por hacer tus sueños realidad", no importa lo complicado que parezca, tú puedes lograr lo que te propongas si te preparas, te esfuerzas y eres perseverante. Tal es el caso de Juan Alberto Guevara Jaramillo, mexicano candidato a cosmonauta científico en la Agencia Espacial Federal Rusa (Roscosmos). Para conocer más sobre Juan Alberto te recomendamos escuchar una videoconferencia en el vínculo de internet siguiente:

https://bit.ly/2HPzTrj

Al final la actividad te sugerimos reflexionar sobre esas metas o sueños que quieres hacer realidad en tu vida.

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

1. ¿Qué es un número primo?

2. ¿Cuáles son las leyes de los signos que se aplican para la suma y resta de números reales?

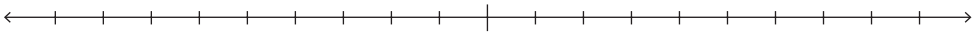
3. ¿Cuáles son las leyes de los signos que se aplican para la multiplicación y división de números reales?

4. Explica qué es el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

5. ¿Cuál es el orden jerárquico en el que se tienen que realizar las operaciones con los números reales?

Matemáticas gráficas

6. Marca en la recta numérica la posición de los números $1,\ -3,\ 8,\ 7,\ 0, -\pi$.



Sugerencia: elige adecuadamente la posición del cero.

(*Continúa*)

(Continuación)

Ejercicios numéricos

7. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left\{2\left[(2+3-5)^2+(2\times2\div1)-(9+5)\right]\right\}\left(2^2+1\right)$

b) $\left[(10+15)(5\times12)^2-(16-4\times3)\right]\div6$

c) $\left[(17-15)^3+(7-12)^2\right]\div\left[(6-7)\times(12-23)\right]$

d) $14-\left\{7+4\times3-\left[(-2)2\times2-6\right]\right\}+(22+6-5\times3)+3-(5-23\div2)$

8. Determina los factores primos de los siguientes números.

a) 1 528 b) 95 842 c) 35 812 d) 12 354

9. Calcula el MCM de los siguientes números.

a) 108 y 60 b) 428 y 376 c) 266 y 123 d) 1 225 y 490

10. Calcula el MCM de los siguientes números.

a) 56 y 189 b) 2 222 y 4 444 c) 159 y 329 d) 18 432 y 288

Problemas de aplicación

11. Mensualmente la cuenta bancaria de Martín recibe un depósito de $850 y sus papás le dan $156 de lunes a viernes. Si Martín gasta $750 a la semana. ¿Cuánto dinero tendrá al final del mes? Considera el mes con 4 semanas.

12. La señora Elvira compró 5 litros de aceite, 10 sobres de gelatina, 2 litros de leche, 2 litros de suavizante de ropa, 1 paquete de pan de caja y 1 paquete de 20 rollos de papel higiénico, si ella paga $19 por litro de aceite, $7 por paquete de gelatina con 2 sobres, $7 por cada medio litro de leche, $20 por litro de suavizante, $30 por el paquete de pan de caja y $5 por rollo de papel higiénico, ¿cuánto tendrá que pagar si al final de sus compras, si le aplican 20% de descuento del total de su compra?

13. Los estudiantes de una universidad deciden realizar un torneo de basquetbol. En el reclutamiento se registran 160 defensas y 64 delanteros. Si se desea formar la mayor cantidad posible de equipos, ¿cuántos defensas habrá en cada equipo?

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este primer bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Resuelvo y formulo de manera colaborativa problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que me permita afrontar retos en situaciones reales.				
Argumento procedimientos para resolver problemas aritméticos presentes en mi contexto.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje esperado y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.
Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.

Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 329 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Investiguen en equipo de cuatro integrantes, en los medios que tengan a su alcance, los siguientes temas: • Números naturales. • Números racionales. • Números irracionales. • Números reales. • Números complejos.	Fichas de trabajo, Mapa conceptual, Juego didáctico.	Pág. 6	Escala estimativa.
Formen equipos de tres integrantes y aplicando la clasificación de los números reales realicen las siguientes actividades.	Problemas resueltos.	Pág. 9	Lista de cotejo.
Resuelvan, en equipos de tres integrantes, las situaciones que se presentan a continuación. Utilicen las leyes de los signos para la suma.	Problemas resueltos.	Pág. 13	Lista de cotejo.
Resuelve las situaciones que se presentan a continuación. En ellas debes aplicar las leyes de los signos para la multiplicación.	Problemas resueltos.	Pág. 15	Lista de cotejo.
Resuelvan, en binas, las actividades que se presentan a continuación. Posteriormente, cada equipo propondrá dos o tres ejemplos para que el resto del grupo determine la solución.	Problemas resueltos.	Pág. 20	Lista de cotejo.

BLOQUE 2

Razones y proporciones

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
6 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Usa razones y proporciones para analizar el impacto de las diferentes variables cuantitativas en aspectos de su vida.

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES

Interdisciplinariedad	Ejes transversales
Química 1 Taller de Lectura y Redacción 1 Informática 1 Ética 1	Eje transversal Social Eje transversal Ambiental Eje transversal de la Salud Eje transversal de Habilidades lectoras

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 1.4 Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
CG 5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

CONOCIMIENTOS

- Razones y proporciones.
  - Porcentajes.
  - Variación directa e inversa.

ACTITUDES

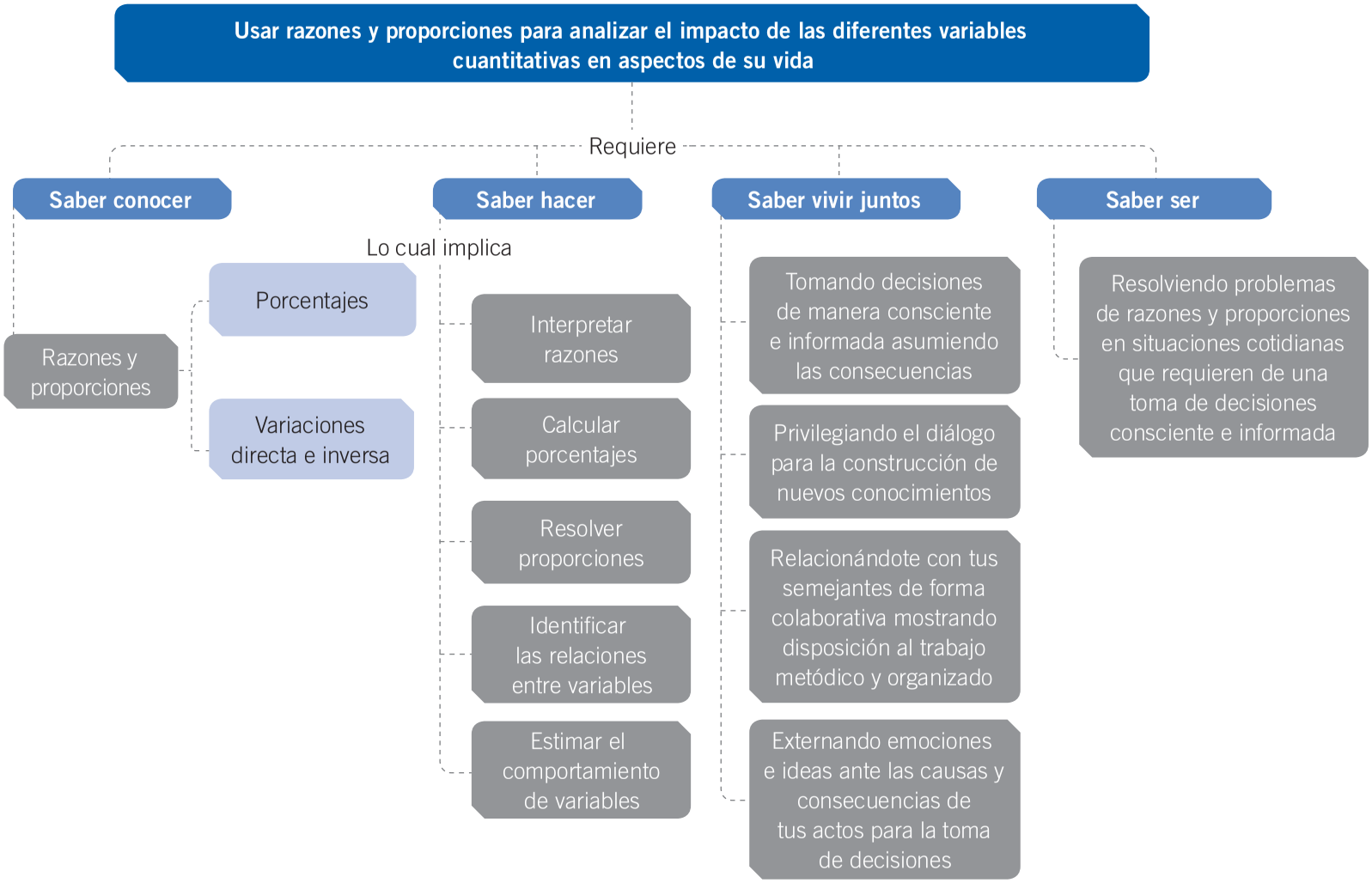
- Toma decisiones de manera consciente e informada asumiendo las consecuencias.
- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo organizado.
- Externa emociones e ideas ante las causas y consecuencias de sus actos para la toma de decisiones.

HABILIDADES

- Interpreta razones.
- Calcula porcentajes.
- Resuelve proporciones.
- Identifica las relaciones entre variables.
- Estima el comportamiento de variables.

APRENDIZAJE ESPERADO

- Resuelve problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren de una toma de decisiones consciente e informada.


Usar razones y proporciones para analizar el impacto de las diferentes variables cuantitativas en aspectos de su vida
Requiere
Saber conocer
Saber hacer
Saber vivir juntos
Saber ser
Lo cual implica
Razones y proporciones
Porcentajes
Variaciones directa e inversa
Interpretar razones
Calcular porcentajes
Resolver proporciones
Identificar las relaciones entre variables
Estimar el comportamiento de variables
Tomando decisiones de manera consciente e informada asumiendo las consecuencias
Privilegiando el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos
Relacionándote con tus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado
Externando emociones e ideas ante las causas y consecuencias de tus actos para la toma de decisiones
Resolviendo problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren de una toma de decisiones consciente e informada

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. El 25% de 42 es:
- a) 10.5
- b) 1.05
- c) 5.10
- d) 0.105

2. La fracción 0.25 recibe el nombre de:
- a) Porciento.
- b) Porcentaje.
- c) Fracción común.
- d) Fracción decimal.

3. La fracción $\frac{5}{4}$ en forma decimal equivale a:
- a) 1.52
- b) 1.25
- c) 2.15
- d) 2.25

4. $\frac{2}{3}$ de 99 es:
- a) 33
- b) 66
- c) 69
- d) 96

5. ¿Por qué es importante comprender el concepto de proporción?

6. ¿En la vida cotidiana en dónde se presenta el uso de las tasas y las razones?

7. ¿Qué significa 1:1?

8. ¿Cuál es la diferencia entre variación directa y variación inversa?

Razones y proporciones

¿Cuál es el precio de la gasolina en tu comunidad? ¿Cuánto aumentó, en porcentaje, respecto del mismo mes del año anterior? ¿Cómo es la situación de México en términos de dependencia o independencia económica en materia de hidrocarburos? ¿Cómo responderías las preguntas anteriores con el uso de las matemáticas?¿Para qué sirven los números? ¿Dónde se emplea el concepto de razón? Si te dejaran realizar una maqueta a escala del estadio de futbol de tu localidad, ¿qué harías para elaborar dicha maqueta?

Porcentajes

En acción

Se entrevistaron 13 000 personas con relación a su estado civil, los resultados de la encuesta se muestran en la tabla que aparece a continuación. Se pretende escribir los resultados en cifras porcentuales, por ejemplo, el primer renglón indica que del total de personas entrevistadas, 2 990 eran casados por primera vez, es decir:

$$\frac{2\,990}{13\,000} = 0.23 = 23\%$$

Realiza las operaciones necesarias y llena los espacios que faltan en la tabla siguiente.

Estado civil	Número	Porcentaje
Casado por primera vez	2990	23%
Casado más de una vez	910	
Unión libre	2210	
Viudo	780	
Divorciado o separado	1690	
Soltero	4420	

Como habrás observado, en la actividad anterior se utilizaron sólo *números positivos* y el *cero*. Pero, además, están escritos en el sistema decimal; por esta razón, a todos se les llama *números decimales* y pueden expresarse como *enteros*, *fracciones* o *porcentajes*.

Enteros: 72, 16 835, 5 104

Fracciones: 313.32, 121.58, $\frac{2}{9}$

Porcentajes: 23%

Un número recibe su nombre por la forma en que esté escrito. Así, tenemos que:

0.11	se llama *fracción decimal.*
$\frac{2}{9}$	se llama *fracción común.*
23%	se llama *porcentaje.*

En acción

Realicen, en grupo, una lluvia de ideas basada en las siguientes preguntas y respóndelas con base en tus conclusiones.

1. ¿Cuáles son los componentes de una fracción?

2. ¿Cuáles tipos de fracciones existen?

3. ¿A qué se le llama fracción equivalente?

4. ¿A qué se le llama simplificar una fracción?

5. ¿Cómo se puede representar una fracción en la recta numérica?

Pueden exponer sus conclusiones mediante una presentación electrónica realizada con las herramientas de *Knovio* (https://bit.ly/2DRFvio), *Powtoon* (https://bit.ly/2j7j4Ki) o *Prezi* (https://bit.ly/1eK1jrJ).

Conversión de fracciones

Para convertir *fracciones comunes* a *fracciones decimales* basta efectuar la división correspondiente. Para ello, puedes utilizar tu calculadora.

$$\frac{3}{4} = 0.75, \quad \frac{1}{5} = 0.2, \quad \frac{2}{9} = 0.22222\ldots, \quad \frac{2}{12} = 0.16666\ldots$$

Las **fracciones decimales periódicas** generalmente se escriben con una pequeña raya sobre el número que se repite:

$$0.222\ldots = 0.\overline{2} \quad 0.16666\ldots = 0.1\overline{6}$$

GLOSARIO

Fracción decimal periódica. Aquella en la que se repite un número decimal.

Si la conversión es de una *fracción decimal* a una *fracción común*, escribimos como numerador el decimal sin el punto y como denominador la unidad fraccionaria que corresponda a la fracción decimal dada. Por último, se simplifica la fracción común:

$$0.5=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad 0.75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4} \qquad 0.250=\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$$

Para convertir una fracción decimal periódica en fracción común se procede de la siguiente manera.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Convierte $0.6666\ldots=0.\overline{6}$ en fracción común.

Solución

$x = 0.666\ldots$ Se designa con x la fracción periódica.
$10x = 6.666\ldots$ Se multiplica por 10 a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} 10x &= 6.666 \\ -x &= 0.666 \\ \hline 9x &= 6 \end{aligned}$$

Se resta la primera igualdad de la segunda.

$$x=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Se despeja x y se simplifica la fracción.

2. Convierte $0.1666\ldots=0.1\overline{6}$ en fracción común.

Solución

$x = 0.1666\ldots$ Se designa con x la fracción decimal.
$10x = 1.666\ldots$ Se convierte la **fracción mixta** en fracción pura.
$100x = 16.66\ldots$ Se multiplica por 10 a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned} 100x &= 16.66\ldots \\ -10x &= 1.666\ldots \\ \hline 90x &= 15 \end{aligned}$$

Se resta la primera igualdad de la segunda.

$$x=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

Se despeja x y se simplifica la fracción.

GLOSARIO

Fracción mixta. Aquella en la que se tiene un número entero y una fracción combinada.

Para convertir porcentajes como 76%, procedemos a escribirlo como 76 partes de 100, lo cual se lee como 76 por ciento o 76 centésimos.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. **Relación de horas de trabajo**
Los profesores mexicanos laboran en promedio $29\frac{2}{5}$ horas a la semana, mientras que los estadounidenses $25\frac{1}{4}$ horas. ¿Qué porcentaje de horas trabajan los profesores estadounidenses en comparación con los profesores mexicanos?

Solución

$$25\frac{1}{4} = 25.25 \text{ y } 29\frac{2}{5} = 29.4 \quad \text{Convertimos las fracciones.}$$

Para encontrar el porcentaje, dividimos el número de horas que trabajan los profesores estadounidenses entre el número de horas que laboran sus colegas mexicanos.

$$\text{Porcentaje: } \frac{25.25}{29.4} = 0.8588 = 85.88\%$$

Los profesores estadounidenses laboran un 85.88% de la jornada laboral de los profesores mexicanos.

2. Cálculo de intereses

Una institución financiera ofrece crédito a sus clientes con una tasa de interés del 4.5% mensual fija.

a) ¿Cuál es la tasa de interés anual?

b) Si el impuesto al valor agregado (IVA) sobre los intereses es del 13%, ¿a cuánto asciende el costo anual total (CAT)?

c) ¿Cuánto dinero hay que pagar en un año por un préstamo de $91 700?

Solución

a) Tasa anual $= (4.5\%)(12) = 54\% = 0.54$

b) CAT = tasa anual + 13% de tasa anual $= 0.54 + (0.54)(0.13)$
$= 0.6102 = 61.02\%$

c) Pago total = $91 700 + 61.02% de los $91 700
$= \$91\,700 + (\$91\,700)(0.6102) = \$147\,655.34$

WEB

Analiza el recurso "Porcentajes, fracciones y conversiones decimales" https://bit.ly/2qHAjIz y propón junto con un compañero una serie de cinco ejercicios similares de la vida cotidiana.

Actividad de aprendizaje 1

Competencias a desarrollar

- CG 5.3
- CDBM 2
- CDBM 3
- CDBM 5

Resuelvan, en binas, las actividades que se presentan a continuación. Posteriormente, cada equipo propondrá dos o tres ejemplos para que el resto del grupo determine la solución. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

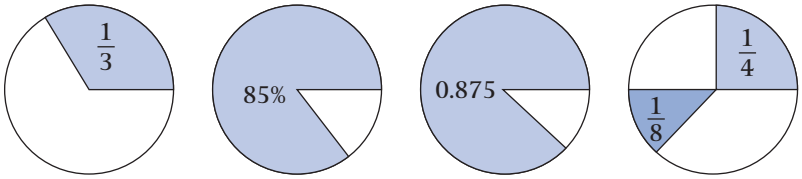
1. Efectúa las operaciones necesarias y complementa la tabla siguiente.

Problema	Resultado
a) La fracción $\frac{49}{56}$ en forma decimal es equivalente a	
b) Representa 0.7860 en porcentaje.	
c) ¿Cómo se escribe 65% en forma decimal?	
d) Representa 766 en fracción común.	
e) Escribe la fracción $0.333\ldots = 0.\overline{3}$ como fracción común.	
f) Escribe la fracción $0.8333\ldots = 0.8\overline{3}$ como fracción común.	

(Continúa)

(Continuación)

2. Escribe la fracción equivalente que aparece en blanco en cada círculo.



_____ _____ _____ _____

3. El área total de la Tierra es de 5.098870×10^6 km^2. Si el 70.8% de la superficie está cubierto por agua, calcula la cantidad de kilómetros cuadrados que esto representa.

Al finalizar la actividad conversen dentro del equipo y reflexionen sobre cómo se sintieron cuando otro de sus compañeros les explicaba el proceso a seguir para resolver el caso expuesto, ¿sabías que a esta dinámica se le conoce como trabajo entre pares?

Agreguen interactividad a su trabajo usando las herramientas de *EducaPlay* (http://bit.ly/2Jo5eAy), que permiten crear actividades de relacionar columnas; así, pueden desafiar a otros equipos a que resuelvan los problemas que proponen.

Razones

La palabra racional se toma del concepto matemático de **razón**, que significa *comparar dos cantidades* o *dos números*. Esta comparación se puede realizar de dos maneras diferentes: una *por diferencia* y otra *por división*.

De esta forma, si el productor de cierto edulcorante bajo en calorías afirma que 4 onzas de su producto equivalen a 1 libra (16 onzas) de azúcar normal, entonces, puede decir que el poder edulcorante de su producto es 4 veces mayor que el del azúcar, o bien, que hay una razón entre ellos de 4 a 16. Esta razón puede expresarse como la fracción $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 25\%$. En conclusión, se necesita sólo una cucharada del edulcorante o 4 cucharadas de azúcar para producir el mismo efecto.

Razón aritmética	Razón geométrica
$a - b$	$\frac{a}{b} = a \div b = a : b$
Ésta se presenta cuando la comparación se realiza por medio de una diferencia.	Se presenta cuando la comparación se expresa por medio de una división.

En una razón, los términos reciben el nombre de *antecedente* (“a”) el primero y *consecuente* (“b”) el segundo.

En la vida cotidiana, las razones como *modelos matemáticos* son de uso muy frecuente y tienen gran importancia. Éstas se usan desde la elaboración de una maqueta a escala hasta movimientos financieros que impactan el mercado bursátil.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. ¿Qué parte de 35 es 12.4?

Solución

Dividimos 12.4 entre 35:

$$\frac{12.4}{35} = 0.35 = 35\%$$

2. ¿Entre qué número debemos dividir el 40 para que nos dé 160?

Solución

Llamemos x al número que deseamos conocer. De esta forma:

$$\frac{40}{x} = 160$$

Luego, si consideramos los recíprocos, tenemos que:

$$\frac{x}{40} = \frac{1}{160}, \text{ por lo tanto, } x = \frac{40}{160} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Actividad de aprendizaje 2

Resuelve las siguientes situaciones aplicando tus aprendizajes sobre razones. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Situación	Solución
1. ¿Qué parte de 75 es $\frac{1}{3}$?	
2. ¿Cuánto pierde de su valor un automóvil que se vende a $\frac{5}{7}$ de su valor original, el cual fue de $230 000?	
3. Un vendedor tiene que recorrer el primer día las $\frac{3}{5}$ partes de 126 km y el segundo día $\frac{3}{5}$ de lo que le resta. ¿Cuánto le falta por recorrer?	
4. Tres socios se van a repartir $986 000; el primero y el segundo recibirán $\frac{4}{7}$ y $\frac{1}{4}$ del total, respectivamente. ¿Cuánto recibirá el tercero?	

(Continúa)

Competencias a desarrollar

- CG 1.4
- CG 5.3
- CDBM 2
- CDBM 3
- CDBM 5

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2JZNtJg

(Continuación)

5. Luego de cortar $\frac{5}{13}$ y $\frac{1}{5}$ de una tabla de madera, la longitud de ésta ha disminuido en 84 cm. ¿Cuál era su longitud original?	
6. En una escuela preparatoria, el número de alumnos respecto de las alumnas es de $\frac{3}{5}$. Si el total de estudiantes es de 2 384, ¿cuántos estudiantes mujeres y hombres hay?	
7. Las ventas de un combustible A respecto de las del combustible B están en la razón $\frac{7}{4}$. Si mensualmente se venden 11 200 litros en total, ¿cuántos litros se venden de A y cuántos de B?	
8. El largo y el ancho de un rectángulo están en la razón de 3:2. Si su perímetro es de 95 cm, determina las medidas de largo y ancho.	
9. Un estudiante contestó correctamente 17 de 23 preguntas en un examen. ¿Cuál es la razón de preguntas incorrectas al número de correctas?	

Tasas

Una **tasa** es una razón que compara dos cantidades que tienen unidades diferentes. Muy probablemente, has escuchado hablar de este término cuando ves las noticias financieras en la televisión. El porcentaje que produce un capital se conoce como *tasa de interés*.

Ejemplo

¿Cuál es la tasa de rendimiento del automóvil de la **Figura 2.1** si su dueño afirma que puede recorrer 530 kilómetros con 48 litros de combustible?

Solución

$$\text{Tasa de rendimiento} = \frac{530\ \text{km}}{48\ \text{L}} = 11.04\ \frac{\text{km}}{\text{L}}$$

Figura 2.1 Automóvil.

En acción

Resuelve las siguientes situaciones poniendo en acción tus aprendizajes sobre tasas.

Situación	SOLUCIÓN
1. ¿Cuál es la velocidad de reacción por hora de un analgésico si la dosis prescrita es de 80 mg cada 8 horas?	

2. ¿Cuánto gasta diariamente una familia, si la estimación de gasto mensual es de $12 000?	
3. El crecimiento de un cultivo de bacterias es de 700 cada hora. Calcula el crecimiento por minuto.	
4. Un restaurante ofrece cortesías en el consumo de tu primera visita de 2×1 o 3×2. ¿Cuál te conviene más?	
5. Un automovilista afirma que su vehículo puede recorrer 100 kilómetros con 8 litros de combustible. ¿Cuál es la tasa de rendimiento del automóvil?	

Variación directa e inversa

Proporciones

En matemáticas, la *igualdad de dos razones* se llama **proporción**. Por ejemplo, $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, lo que también se puede expresar como 3:4 = 12:16 y se lee "3 es a 4 como 12 es a 16".

En general, si tenemos la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que puede expresarse también como los términos a y d se llaman *extremos*, mientras que b y c son los *medios*.

$$\overbrace{a : \underbrace{b = c}_{\text{Medios}} : d}^{\text{Extremos}}$$

Propiedad fundamental de las proporciones

La propiedad fundamental de las proporciones dice que el producto de sus extremos es igual al producto de sus medios, es decir:

$$ad = bc$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Un pintor **A** puede hacer un trabajo en 5 días, mientras que otro pintor **B** afirma que lo puede realizar en 3 días (**Figura 2.2**). ¿Cuántos días tomaría a ambos pintores laborando juntos completar el trabajo?

Figura 2.2 Pintores trabajando.

Solución

El pintor **A** realiza $\frac{1}{5}$ del trabajo en un día.

El pintor **B** realiza $\frac{1}{3}$ del trabajo en un día.

(*Continúa*)

(Continuación)

Ambos trabajadores terminan en x días, y en un día hacen $\frac{1}{x}$ del trabajo.

Por lo tanto, lo que pueden hacer los dos trabajadores en un día es:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x}$$

Con el apoyo de tu profesor, despeja x en la igualdad anterior y recuerda cómo se llama la igualdad de estas razones.

De tal modo que la proporción es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}+\frac{1}{3}&=\frac{1}{x}\\
(15)\times\frac{1}{5}+(15)\times\frac{1}{3}&=\frac{1}{x}\times(15) && \text{Multiplicamos cada término por el MCM.}\\
3+5&=\frac{15}{x} && \text{Simplificamos.}\\
8&=\frac{15}{x}\\
8x&=15 && \text{Propiedad fundamental de las proporciones.}\\
x&=\frac{15}{8}=1.9 && \text{Despejamos } x.
\end{aligned}$$

Esto significa que ambos pintores realizan el trabajo en 1.9 días (1 día y 21.6 horas).

2. En la proporción $\frac{x}{15}=\frac{66}{5}$, encuentra el valor de x.

Solución

Utilizamos la propiedad fundamental de las proporciones:

$$\begin{aligned}
5x&=(15)(66)\\
x&=\frac{(15)(66)}{5}=198 && \text{Simplificamos.}
\end{aligned}$$

GLOSARIO

Figuras semejantes. En geometría, son aquellas que tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.

3. Enseguida se muestran dos **figuras semejantes** (triángulos) cuyos lados se miden en centímetros. Encuentra el valor del lado z del triángulo de la **Figura 2.3**.

Solución

Como los triángulos son semejantes, sus lados correspondientes tienen que ser proporcionales. Es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{3}&=\frac{4}{6}\\
\frac{z}{3}&=\frac{2}{3} && \text{Simplificamos.}\\
z&=\frac{2}{3}(3)=2 && \text{Despejamos } z.
\end{aligned}$$

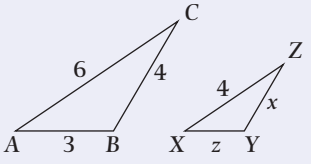


Figura 2.3 Triángulos semejantes.

4. Supón que corres con el viento a tu favor y recorres 4 km. Piensas que de regreso harás el mismo tiempo, pero ¡sorpresa! sólo recorres 2.5 km en ese lapso (**Figura 2.4**). Por supuesto, el viento corría a 3 km por hora. ¿Cuál sería tu velocidad, v, si el viento estuviera tranquilo?

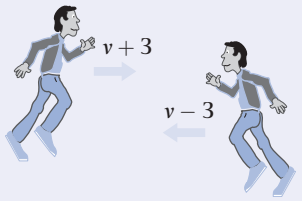


Figura 2.4 Correr en direcciones contrarias.

Solución

Llamemos $v + 3$ a tu velocidad en un sentido y $v - 3$ a tu velocidad en sentido contrario cuando sopla el viento.

Si el viento estuviera tranquilo, harías el mismo tiempo en un sentido que en sentido contrario:

$$\underbrace{t}_{\text{Tiempo de ida}} = \underbrace{t}_{\text{Tiempo de regreso}}$$

Recordemos que el tiempo se obtiene dividiendo el desplazamiento entre la velocidad. Entonces:

$$\frac{4}{v+3} = \frac{2.5}{v-3} \qquad \text{Igualamos los tiempos.}$$

$$(v-3) = 2.5(v+3) \qquad \text{Propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$v - 12 = 2.5v + 7.5 \qquad \text{Simplificamos.}$$

$$-2.5v = 12 + 7.5 \qquad \text{Trasponemos términos.}$$

$$1.5v = 19.5$$

$$v = \frac{19.5}{1.5} = 13 \qquad \text{Despejamos } v.$$

Por lo tanto, tu velocidad con el viento tranquilo es de 13 km/h.

Actividad de aprendizaje 3

Resuelvan, en equipos de cuatro integrantes, las siguientes situaciones aplicando sus aprendizajes sobre proporciones. Recuerden que todos tienen responsabilidad y compromiso de cumplir con la tarea. Por lo que si alguno de ustedes tiene dudas sobre cómo resolver alguna situación, es importante que otro de ustedes, que sí lo comprenda, le explique detenidamente y le dé consejos para que comprenda lo que tiene que hacer en cada caso. A esta dinámica se le conoce como trabajo entre pares. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Resuelve la proporción $\frac{x}{14} = \frac{58}{100}$.

Competencias a desarrollar

- **CG 1.4**
- **CG 5.3**
- **CDBM 2**
- **CDBM 3**
- **CDBM 5**

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

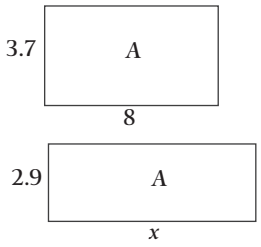
https://bit.ly/2HyiUvy

(*Continúa*)

(Continuación)

2. Un reloj se atrasa 1.7 minutos en una semana. ¿Cuánto se atrasará en un año?

3. Una superficie rectangular mide 3.7 m de ancho por 8 m de largo. ¿Cuánto se debe variar el largo para que el ancho sea de 2.9 m sin que la superficie cambie?



4. Dos triángulos son semejantes y sus lados se miden en centímetros. Encuentra el valor del lado *x* del triángulo de la **Figura 2.5**.

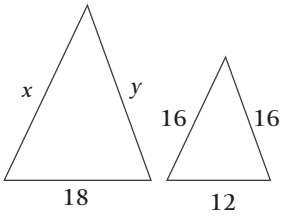


Figura 2.5 Tríangulos semejantes.

5. Encuentra el valor de *x* de acuerdo con la **Figura 2.6**.

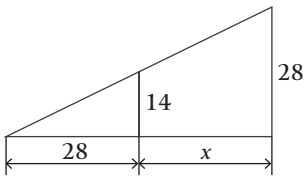


Figura 2.6 Triángulo rectángulo.

Variación directa

Cuando en matemáticas dos cantidades variables están relacionadas de forma que una siempre es un múltiplo constante de la otra, se dice que ocurre *variación directa.*

Si x y y están relacionadas mediante la expresión algebraica:

$$y = kx,$$

donde $k \neq 0$ se dice que y varía en forma *directamente proporcional* a x, y la constante k se llama *constante de proporcionalidad.* Esto significa que cuando x aumenta o disminuye, y aumenta o disminuye en la misma proporción.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. La ley de Hooke establece que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su posición natural varía en forma directamente proporcional a x. Una fuerza de 27 libras alarga el resorte 3 pulgadas (**Figura 2.7**).

a) Escribe una ecuación que relacione la fuerza aplicada con la distancia alargada x, y determina la constante de proporcionalidad k.

b) ¿Cuánto alargará el resorte una fuerza de 54 libras?

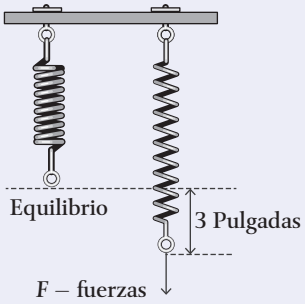


Figura 2.7 Resorte en equilibrio y alargado.

Solución

a) x es la distancia que se alarga el resorte; F es la fuerza que estira el resorte. Como la fuerza varía en forma directamente proporcional con lo que se estira el resorte, tenemos que:

$F = kx$, entonces, $k = \dfrac{F}{x} = \dfrac{27}{3} = 9$, lo cual implica que la ecuación buscada es $F = 9x$.

b) Si $F = 54$ libras, la distancia que se alargará el resorte es:

$$x = \frac{F}{9} = \frac{54}{9} = 6 \text{ pulgadas}$$

2. Durante una tormenta vemos el relámpago antes de oír el trueno porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido (**Figura 2.8**). La distancia entre tu posición y el centro de la tormenta varía directamente con el tiempo que transcurre entre el instante en que se ve el relámpago y el momento en el que se escucha el trueno.

Suponiendo que el trueno de una tormenta, cuyo centro está a 3 292 metros de distancia, se escucha 10 segundos después de que se ve el relámpago, determina la constante de proporcionalidad y escribe la ecuación de la variación.

Figura 2.8 Relámpago.

Solución

Llamemos t al tiempo que transcurre entre el instante en que se ve el relámpago y el instante en que se escucha el trueno, y d la distancia entre

(*Continúa*)

(Continuación)

la tormenta y la posición que ocupas. Por lo tanto, como la variación entre estas variables es directa:

$$d = kt$$

Entonces, $k = \frac{d}{t} = \frac{3\,292}{10} = 329.2$. Al sustituir este valor en $d = kt$, obtenemos la ecuación de d en función de t. Es decir:

$$d = 329.2\ t$$

Variación inversa

Si x y y son dos cantidades variables y están relacionadas mediante la expresión algebraica:

$$y = k\frac{1}{x},$$

donde $k \neq 0$, se dice que y varía en forma *inversamente proporcional* a x, y la constante k se llama *constante de proporcionalidad*. Esto significa que cuando x aumenta, y disminuye en la misma proporción o viceversa.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Ley de Boyle. Cuando un gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.
Observa en la gráfica de la **Figura 2.9** que si el gas se comprime a la mitad de su volumen, la presión se duplica.
La presión P de un gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional a su volumen V.

a) Escribe una ecuación que exprese el enunciado anterior.
b) Si 67.8 litros de gas ejercen una presión de 22.5 kilopascales (kPa) a una temperatura de 400 Kelvin, determina la constante de proporcionalidad.

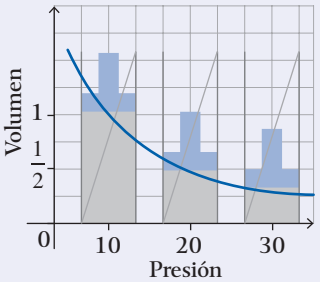


Figura 2.9 Compresión de un gas.

Solución

a) $P = k\frac{T}{V}$

b) $22.5\ kPa = k\frac{400\ \text{K}}{67.8\ \text{L}}$ Sustituimos valores.

$$k = \frac{(22.5\ \text{kPa})(67.8\ \text{L})}{400\ \text{K}} = 3.8\ \frac{\text{kPa}\cdot\text{L}}{\text{K}}$$ Despejamos k.

Actividad de aprendizaje 4

Competencias a desarrollar
- CG 1.4
- CG 5.3
- CDBM 2
- CDBM 3
- CDBM 5

Resuelve las siguientes situaciones aplicando tus aprendizajes en modelos de variación directa e inversa. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Escribe una fórmula algebraica que exprese el enunciado y luego utiliza la información dada para determinar el valor de la constante de proporcionalidad de las situaciones presentes en la tabla siguiente.

Enunciado	Fórmula	k
a) R varía directamente con I. Si $R = 2$, entonces, $I = 16$.		
b) z varía inversamente con u. Si $z = 15$, entonces, $u = 6$.		
c) Si $x = 2$, entonces, $y = 23$.		
d) W varía inversamente con r^2. Si $r = 3$, entonces, $W = 5$.		
e) S varía directamente con p y q. Si $S = 7$, entonces, $p = 28$ y $q = \frac{7}{4}$.		

2. Marca con el símbolo ✓ la celda correspondiente para indicar si las magnitudes son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

Enunciado	Variación directa	Variación inversa
a) La calificación y el desempeño escolar.		
b) La velocidad y el tiempo de un automóvil para recorrer una distancia dada.		
c) El gasto de energía eléctrica y el número de lámparas.		
d) Un trabajo determinado y el número de empleados.		

3. Expresa la ley de Hooke como una ecuación. Si un resorte tiene una longitud natural de 25 cm y se requiere una fuerza de 47 newtons (N) para mantener el resorte estirado a una longitud de 38 cm (**Figura 2.10**), calcula la constante del resorte.

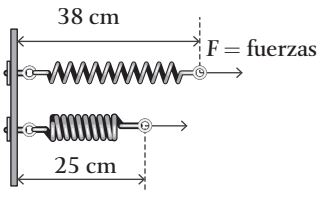


Figura 2.10 Estiramiento de un resorte.

4. La resistencia R de un conductor eléctrico varía directamente con su longitud L y en forma inversamente proporcional con el cuadrado de su diámetro d (**Figura 2.11**). Escribe una expresión de esta

(Continúa)

(Continuación)

variación y determina la constante de proporcionalidad para un conductor de 3 m de largo, 1.5 cm de diámetro y una resistencia de 270 ohms.

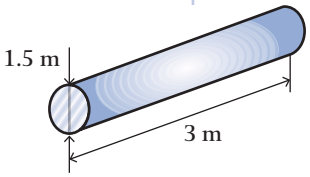
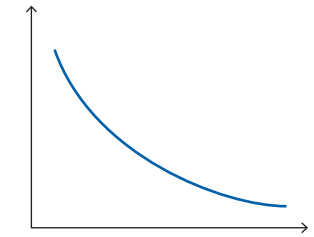
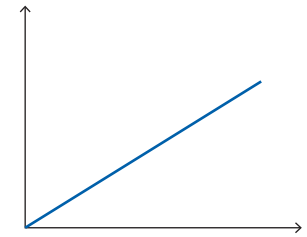


Figura 2.11 Conductor eléctrico.

5. La *ley de Boyle-Mariotte* dice que cuando un gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo, y la ley de *Charles y Gay-Lussac* enuncia que si la presión se mantiene constante, el volumen del gas es directamente proporcional a la temperatura.

Considerando estos enunciados, identifica en las gráficas de abajo cada ley y escribe su nombre en el recuadro correspondiente. Además, escribe el nombre adecuado para cada uno de los ejes de las gráficas para saber si representan el volumen, la presión o la temperatura.





Competencias a desarrollar

- **CG 1.4**
- **CG 5.3**
- **CDBM 5**

Actividad de aprendizaje 5

Formen equipos de cuatro integrantes y aplicando sus aprendizajes sobre razones, tasas y proporciones realicen la actividad siguiente. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Construyan una reflexión donde expliquen, cómo el conocer sobre el cálculo de razones, tasas, proporciones y modelos de variación directa o inversa, contribuye a la comprensión de fenómenos sociales y preséntenla ante el grupo.

Al finalizar la actividad conversen dentro del equipo y reflexionen sobre cómo se sintieron cuando otro de sus compañeros les explicaba el proceso a seguir para resolver el caso expuesto, ¿sabías que a esta dinámica se le conoce como trabajo entre pares?

Sugerimos que trabajen sus reflexiones en formato de video con ayuda de las herramientas de *PowToon* (https://bit.ly/2j7j4Ki) o *Wideo* (https://bit.ly/2uTTe7T), y suban el resultado a YouTube para compartirlo con su grupo y comentarlo en plenaria.

WEB

Consolida lo aprendido en este bloque realizando lo siguiente: 1. Revisa y trabaja con las actividades de los recursos: *Razones y proporciones* (https://bit.ly/2HgpHXm), *Razones, tasas y proporciones* (https://bit.ly/2JX72Il), *Cocientes demográficos: tasas, probabilidades, razones y proporciones* (https://bit.ly/2HKvs0E); 2. Con lo visto en los recursos creen un tríptico y compártanlo con sus compañeros del colegio; 3. Para crear su tríptico pueden utilizar la herramienta *Canva* (https://bit.ly/1Nj4Fba).

Conexiones

Los aprendizajes que has construido a lo largo del bloque son de gran utilidad para la comprensión de muchas de las áreas del conocimiento. Con el objetivo de reafirmar la relación que existe entre las asignaturas Matemáticas 1, Química 1, Informática 1 y Taller de lectura y redacción 1 te proponemos realizar lo siguiente:

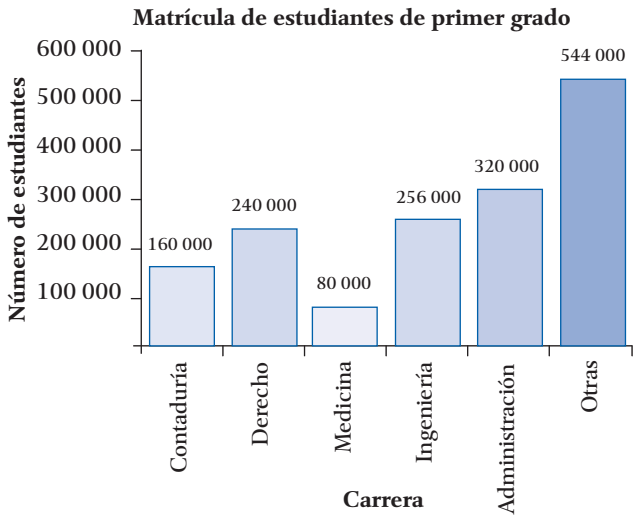
Investiga, en medios electrónicos o impresos, cómo el conocer sobre razones y proporciones te puede ayudar a analizar de manera objetiva las cualidades de diferentes compuestos químicos. Realiza un reporte escrito acerca de la importancia que tienen los temas estudiados en este bloque para comprender las propiedades físicas y químicas de los elementos y compuestos químicos.

Habilidad matemática

1. Un auto compacto usa gasolina que cuesta $17.25 por litro, cada litro da un rendimiento de 9 kilómetros. Para un recorrido de 99 kilómetros, ¿cuánto dinero se debe invertir en gasolina?

a) $155.25 b) $189.75
c) $1192.32 d) $1707.75

2. La gráfica siguiente muestra la matrícula de ingreso de estudiantes en una universidad. Si al año siguiente se da de baja 13% de los estudiantes en cada carrera, ¿cuántos estudiantes de ingeniería permanecerán en la carrera en el segundo año escolar?



a) 33 280 b) 208 000 c) 222 720 d) 255 987

SOMOS IGUALES

¿Sabías que tú puedes lograr lo que te propongas si te esfuerzas y luchas por hacer tus sueños realidad? Tal es el caso de la mexicana María Regina Apodaca Moreno, estudiante de Física en la Facultad de Ciencias de la UNAM quien desarrolló la idea y fabricó el modelo de un helicóptero que será el primer vehículo que la NASA volará sobre Marte en una misión planeada para el 2020[1]. Si quieres conocer más acerca de ella, ingresa a los vínculos siguientes:
https://bit.ly/2vrGeGO
https://bit.ly/2HLogBD

[1] APRO, (2017). Alumna de la UNAM crea helicóptero para la NASA que volará en Marte. *Proceso*. Recuperado de https://bit.ly/2qJ2irA

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

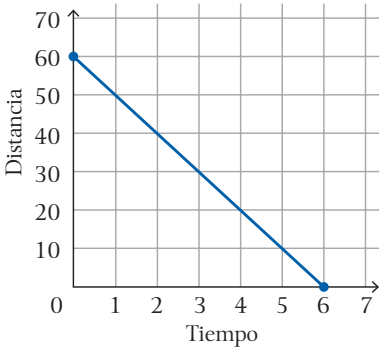
1. ¿Cuál es la diferencia entre tasa y razón?

2. ¿Qué es una proporción?

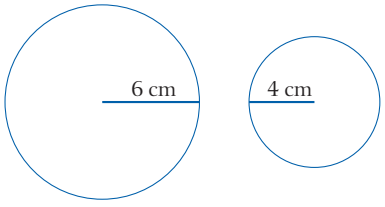
3. ¿Cuál es la diferencia entre una variación directa y una inversa?

Matemáticas gráficas

4. La siguiente gráfica ilustra el cambio de la posición con respecto al tiempo de un vehículo que circula a velocidad constante. Indica cual es la razón de cambio de la posición. Justifica tu respuesta.



5. ¿Cuál es la razón que existe entre el tamaño de las siguientes circunferencias?



Ejercicios numéricos

6. Determina, en tu cuaderno, el valor de x en las siguientes proporciones

a) $\frac{10}{x}=\frac{50}{9}$

b) $\frac{x}{25}=\frac{25}{25}$

c) $\frac{9}{7}=\frac{x}{8}$

d) $\frac{126484}{x}=\frac{6255}{52}$

e) $\frac{1254}{3253}=\frac{12}{x}$

f) $\frac{125}{52}=\frac{x}{3}$

g) $\frac{49}{8} = \frac{x}{5}$

h) $\frac{65}{52} = \frac{95845}{x}$

i) $\frac{925}{x} = \frac{85}{33}$

j) $\frac{x}{20} = \frac{1}{2}$

Problemas de aplicación

7. La edad de Berenice y Yadira está en una relación de 5 a 9 y la suma de ellas es 28. ¿Qué edad tiene cada una de ellas?

8. La razón existente entre las medidas de los lados rectos de un rectángulo es 10:30 y su perímetro mide 2 264 cm. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?

9. Un cultivo consta de 255 513 de bacterias, de las cuales el 45% de ellas mueren al aplicarles el primer químico, de las sobrevivientes 8% mueren al aplicarles el segundo químico, ¿Cuántas bacterias quedan en el cultivo?

10. Una papelería cuenta con 10 fotocopiadoras, las cuales entregan 50 000 copias al día. ¿Cuántas máquinas se necesitan para copiar un millón de copias?

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este segundo bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Resuelvo problemas de razones y proporciones en situaciones cotidianas que requieren de una toma de decisiones consciente e informada.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.
Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.

Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 331 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Resuelvan, en binas, cada equipo propondrá dos o tres ejemplos para que el resto del grupo determine la solución.	Ejercicios resueltos.	Pág. 39.	Lista de cotejo.
Resuelve las siguientes situaciones aplicando tus aprendizajes sobre razones.	Ejercicios resueltos.	Pág. 41.	Rúbrica.
Resuelvan, en equipos de cuatro integrantes, las siguientes situaciones aplicando sus aprendizajes sobre proporciones.	Ejercicios resueltos.	Pág. 45.	Rúbrica.
Resuelve las siguientes situaciones aplicando tus aprendizajes en modelos de variación directa e inversa.	Ejercicios resueltos.	Pág. 49.	Lista de cotejo.
Formen equipos de cuatro integrantes y aplicando sus aprendizajes sobre razones, tasas y proporciones realicen la actividad siguiente.	Ejercicios resueltos.	Pág. 50.	Guía de observación.

BLOQUE 3

Sucesiones y series

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
8 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Resuelve modelos aritméticos, algebraicos y gráficos basándose en el reconocimiento de patrones para relacionar magnitudes constantes y variables de un fenómeno social o natural.

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES

Interdisciplinariedad	Ejes transversales
Química 1	Eje transversal Social
Taller de Lectura y Redacción 1	Eje transversal Ambiental
Informática 1	Eje transversal de la Salud
Ética 1	Eje transversal de Habilidades lectoras

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.
CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos o variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
CDBM 8 Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

CONOCIMIENTOS

- Búsqueda de patrones.
- Sucesiones y series.
  - Aritméticas.
  - Geométricas.

ACTITUDES

- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.
- Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones.

HABILIDADES

- Calcula valores de series aritméticas y geométricas.
- Deduce valores faltantes en sucesiones aritméticas y geométricas.
- Infiere patrones numéricos y gráficos de sucesiones aritméticas y geométricas.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Explica regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones que se encuentran en su entorno.
- Resuelve colaborativamente e interpreta problemas reales o hipotéticos que presentan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos de su localidad.

Resolver modelos aritméticos, algebraicos y gráficos basándose en el reconocimiento de patrones para relacionar magnitudes constantes y variables de un fenómeno social o natural
Requiere
Saber conocer
Saber hacer
Saber vivir juntos
Saber ser
Búsqueda de patrones
Sucesiones y series
Aritméticas
Geométricas
Lo cual implica
Calcular valores de series aritméticas y geométricas
Deducir valores faltantes en sucesiones aritméticas y geométricas
Inferir patrones numéricos y gráficos de sucesiones aritméticas y geométricas
Privilegiando el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos
Relacionándote con tus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado
Expresando libremente tus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones
Explicando regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones que se encuentran en tu entorno
Resolviendo colaborativamente e interpretando problemas reales o hipotéticos que presentan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos de tu localidad

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. En la serie de números –3, 1, 5, 9 … el séptimo número es:
a) 12
b) 24
c) 21
d) 13

2. En la serie de números 3, 6, 12, 24 … el octavo número es:
a) 72
b) 48
c) 192
d) 384

3. Si el valor de un artículo nuevo es de $1 000 y se deprecia $110 anualmente, ¿cuál es su valor al quinto año?
a) $560
b) $450
c) $340
d) $670

4. Si un banco paga 3% de interés anual por invertir $1 000, entonces el dinero acumulado después de 3 años es:
a) $1 090
b) $1 060
c) $1 030
d) $1 092.72

5. ¿Describe un patrón o regularidad que hayas observado en la naturaleza?

6. En matemáticas, ¿qué utilidad tiene descubrir los patrones numéricos?

7. Escribe el concepto de sucesión aritmética.

8. ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión aritmética y una geométrica?

Búsqueda de patrones

El servicio meteorológico, ¿cómo predice el clima? ¿Qué elementos necesita para predecir el clima? En una plataforma de promociones, ¿cómo testean que un cupón no se utilice dos veces?

En acción

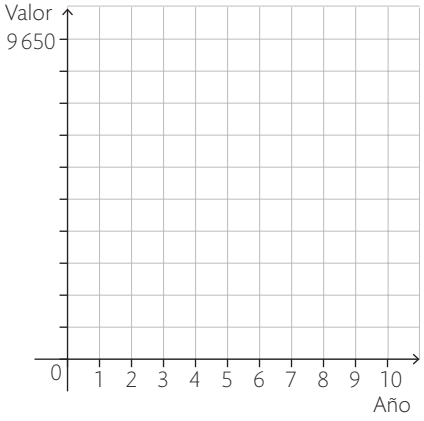
El valor inicial de una laptop es de $9 650. Su depreciación por año es de $1 075. Completa la tabla para conocer el valor de la computadora después de 5 años.

Año	0	1	2	3	4	5
Valor	$9 650					

a) Si llamamos a_n al valor de la laptop y n al número de años de vida, reflexiona con tus compañeros si la expresión $a_n = 9\,650 - 1\,075n$ sirve para calcular el valor de la computadora en cualquier año.

b) ¿En qué año pierde todo su valor la laptop?

c) En la cuadrícula que aparece a continuación dibuja una gráfica del comportamiento de la depreciación anual del precio de la computadora. Luego, observa cuánto vale después de 3 años.



Los **patrones** se encuentran por todas partes y éstos no son otra cosa que regularidades en una sucesión de elementos. En este bloque desarrollarás la capacidad de resolver diversos tipos de

problemas al reconocer patrones numéricos y geométricos. Estos patrones te permitirán analizar su comportamiento a través de **modelos matemáticos.**

Como las sucesiones están conformadas por un consecutivo de números que guardan una relación estrecha entre sus magnitudes. Dicha relación puede ser representada mediante un **modelo matemático**.

Conocer el modelo matemático de una sucesión, es de gran utilidad para descubrir el comportamiento y las relaciones intrínsecas a la misma. Facilitando así, la determinación de cualquiera de sus términos.

De acuerdo con las características de la sucesión, será el modelo matemático que la represente; es decir, si la sucesión se determina mediante una relación aritmética, se le denominará *sucesión aritmética*, o si en cambio, la sucesión atiende a una relación geométrica, se le denominará *sucesión geométrica.*

GLOSARIO

Modelo matemático. Relación entre variables a través de las cuales se puede explicar matemáticamente cualquier situación.

WEB

Analiza el recurso "Introducción a patrones" https://bit.ly/2qKsjqA y realiza en tu cuaderno un resumen que incluya cuatro ejemplos.

Sucesiones y series

¿Un charco incrementa su volumen en función de la cantidad de lluvia? ¿Por qué? ¿El costo de un viaje es equivalente al kilometraje recorrido? ¿Cómo se obtiene esta relación?

Aritméticas

Matemáticamente toda magnitud puede representarse a través de una cantidad, es decir, un número.

Sucesiones aritméticas

Cuando disponemos de una lista de números colocados en un orden específico, lo que estamos obteniendo es una **sucesión** o **progresión numérica**.

De esta forma, si llamamos a_1 al primer término, a_2 al segundo término, a_3 al tercero y a_n al enésimo término de la lista, entonces la sucesión se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Y como a cada término a_n le corresponde un número natural n una **sucesión** o **progresión** se puede definir como una regla de dependencia entre los términos de la sucesión y los números naturales.

GLOSARIO

Sucesión o progresión numérica. Lista de términos dispuestos en un orden específico quedando definidos por una regla de dependencia determinada por el conjunto de los números naturales.

Un ejemplo sencillo de una sucesión son los números impares:

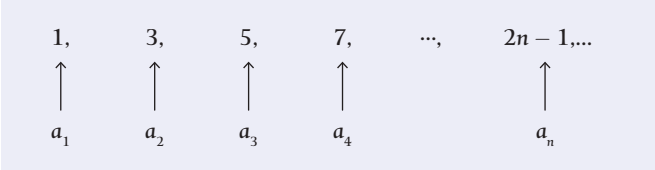
$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

Los puntos suspensivos significan que la sucesión continúa de forma indefinida, por lo que se llama precisamente **sucesión infinita**.

El ejemplo nos muestra que efectivamente se trata de los números impares, pero para mayor exactitud es conveniente especificar un procedimiento para calcular todos y cada uno de los términos de la sucesión. En este caso,

$$a_n = 2n - 1$$

porque si tomamos cualquier número natural n lo multiplicamos por 2 y le restamos 1, obtenemos un número impar. La sucesión se expresa como sigue:



Observa cómo la fórmula $a_n = 2n - 1$ permite obtener todos los términos de la sucesión.

Por ejemplo, los primeros cuatro términos de la sucesión se obtienen de la siguiente manera:

$$\text{Si } n = 1, \text{ entonces, } a_1 = 2(1) - 1 = 1$$
$$\text{Si } n = 2, \text{ entonces, } a_2 = 2(2) - 1 = 3$$
$$\text{Si } n = 3, \text{ entonces, } a_3 = 2(3) - 1 = 5$$
$$\text{Si } n = 4, \text{ entonces, } a_4 = 2(4) - 1 = 7$$

Otra forma de escribir las sucesiones es con la notación funcional, es decir:

$$a(n) = 2n - 1$$

De manera que:

$$a(1) = 2(1) - 1 = 1,\ a(2) = 2(2) - 1 = 3,\ \text{etcétera.}$$

Sucesión aritmética. Es una sucesión de la forma:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d, \ldots$$

donde a_n es el *primer término* y d la *diferencia común* de la sucesión entre dos términos consecutivos.

Por lo tanto, el enésimo término de una sucesión aritmética se puede calcular con la siguiente expresión:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Si $a_1 = 5$ y $d = 8$, calcula los 3 primeros términos y el enésimo término de la sucesión aritmética.

Solución

$$a_2 = a_1 + (n-1)d = 5 + (8)(2-1) = 13$$
$$a_3 = a_1 + (n-1)d = 5 + (8)(3-1) = 21$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + 8(n-1)$$

2. Encuentra los 4 primeros términos y el 100-ésimo (se lee centésimo) término de la sucesión:

$$19,\ 11, \ldots$$

Solución

El primer término es 19, por lo tanto, $a_1 = 19$ y la diferencia entre dos términos consecutivos es $d = 11 - 19 = -8$ luego:

$$a_n = 19 - 8(n-1)$$
$$a_2 = 19 - 8(2-1) = 11$$
$$a_3 = 19 - 8(3-1) = 3$$
$$a_4 = 19 - 8(4-1) = -5$$
$$a_{100} = 19 - 8(100-1) = -773$$

Los primeros 4 términos de la sucesión son: 19, 11, 3, −5 y el 100-ésimo es −773.

Actividad de aprendizaje 1

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 8.2
- CDBM 1
- CDBM 2

Apliquen, en equipos de cuatro integrantes, sus aprendizajes sobre sucesiones aritméticas en la resolución de las situaciones que se presentan a continuación. Si alguno de los integrantes del equipo tiene alguna duda al momento de resolver el ejercicio, es necesario que alguno de ustedes le explique y le dé consejos para que al finalizar la actividad él sea capaz de resolver situaciones semejantes a las aquí planteadas. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2K45gyM

1. Determina la diferencia común, el cuarto término, el 100-ésimo y el enésimo de cada sucesión aritmética.

Sucesión aritmética	d	a_4	a_{100}	a_n
a) 0, 4, 8, 12,…				
b) 1, 6, 11, 16,…				
c) −15, −9, −3, 3,…				
d) 5, 5 + m, 5 + 2m, 5 + 3m,…				

2. Resuelve cada una de las siguientes situaciones.

Sucesión aritmética	Solución
a) El duodécimo término de una sucesión aritmética es 32, y la diferencia común es 3. Calcula el 20-ésimo término.	
b) El 100-ésimo término de una sucesión aritmética es 98, y la diferencia común es 2. Calcula los tres primeros términos.	
c) El vigésimo término de una sucesión aritmética es 101, y la diferencia común es 3. Calcula los dos primeros términos.	

Para el cálculo de las progresiones aritméticas, te sugerimos entrar a https://bit.ly/2qP0wFe y validar si tu respuesta es correcta.

Anécdota de Gauss

Cuenta la historia que cuando el célebre matemático Carl Friedrich Gauss estaba en la escuela, su profesor planteó esta suma a la clase, para mantenerlos ocupados. Gauss dio la respuesta correcta casi de inmediato. Se fijó que los números guardan un patrón de comportamiento y supuso que la suma

Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Matemático alemán que demostró el teorema fundamental del álgebra.

también, y desarrolló este procedimiento: dispuso la suma de los números en orden ascendente y después en orden descendente y sumó de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rl} S = & 1+\ 2+\ 3+\ldots\ +\ 98+99\ +100 \\ S = & 100+\ 99+\ 98+\ldots\ +\ 3+\ 2\ +\ 1 \\ \hline 2S = & 101+101+101+\ldots\ +101+101+101 \end{array}$$

Es evidente que:

$$2S = (1+100)100 = (101)100 = 10\,100$$

por lo tanto: $S = 5\,050$

Naturalmente, este procedimiento puede generalizarse para determinar la suma de los n primeros términos de cualquier sucesión aritmética.

Así:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + a_n \text{ y}$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots + a_1$$

Sumando ambas expresiones tenemos que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)$$

Hay n términos idénticos en el lado derecho de esta ecuación, por eso:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Pero recuerda que $a_n = a_1 + d(n-1)$ es el enésimo término de la sucesión, así que la suma la podemos escribir también como:

$$S_n = \frac{n}{2}[\, a_1 + a_1 + d(n-1)] = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$$

Series aritméticas

Es la suma S_n de los n términos de una sucesión aritmética. Es decir:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + a_n$$

Se puede calcular con cualquiera de las siguientes fórmulas.

1. $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

2. $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Calcula la suma de los primeros 44 números pares.

Solución

En este caso, $a_1 = 1$ y $d = 2$. El enésimo término de esta sucesión es $a_n = 2n$, entonces $a_{44} = 2(44) = 88$. Por lo tanto, la suma buscada es:

$$S_{44} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{44}) = \frac{44}{2}(2 + 88) = 1\,980$$

2. El valor inicial de un automóvil es de 312 000 pesos. Su depreciación anual es de 19 500 pesos. Calcula el valor del auto después de 5 años.

Solución

El valor de $d = -19\,500$ y el de $a_1 = 312\,000 + (-19\,500) = 292\,500$, y estamos buscando a_5, por lo tanto:

$$a_5 = 292\,500 + (5-1)(-19\,500) = 214\,500 \text{ pesos.}$$

Observa la tabla siguiente para una mejor comprensión.

Tiempo	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	Quinto año
Valor	$292 500	$273 000	$253 500	$234 000	$214 500

Actividad de aprendizaje 2

Resuelvan, en binas, la siguiente situación aplicando sus saberes sobre series aritméticas. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Determina cuánto dinero habrá acumulado una persona, durante 5 años, si invierte 16 500 pesos en cierta institución financiera que ofrece 13% de interés anual. Para encontrar la respuesta reflexiona y luego completa las casillas vacías de la tabla siguiente realizando las operaciones correspondientes.

Año	Dinero acumulado	
1	$16\,500 + 16\,500(0.13) = 16\,500(1 + 0.13)$	$18 645
2		
3		
4		
5		

a) Las respuestas correctas de la actividad anterior son: $18 645, $21 068.85, $23 807.80, 26 902.81 y $30 400.17.

b) Divide el dinero acumulado del año 2 entre el dinero del año 1, enseguida divide la cantidad acumulada del año 3 entre la cantidad acumulada del año 2 y así sucesivamente; por último, escribe tu conclusión acerca del resultado de estas divisiones.

c) ¿Cuánto dinero de interés generó la cuenta cada año?

Año	1	2	3	4	5
Dinero ($)					

d) Con tus compañeros y el apoyo de tu maestro reflexiona sobre si el modelo matemático:

$$A = 16\,500(1 + 0.13)^t,$$

Competencias a desarrollar

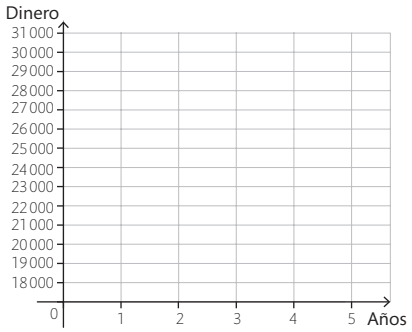
- **CG 5.1**
- **CG 5.2**
- **CG 8.2**
- **CDBM 1**
- **CDBM 2**
- **CDBM 8**

(Continúa)

(Continuación)

generaliza la situación de la propuesta de aprendizaje anterior; *A* representa el saldo de la cuenta por año y *t* el tiempo en años.

e) Bosqueja en la cuadrícula siguiente una gráfica de los resultados de la primera tabla de esta actividad.



Geométricas

Sucesiones geométricas

Otra técnica muy sencilla para generar una sucesión es iniciar con un número a_1 y multiplicarlo en forma repetida por una constante r que no sea cero. Observa cómo se comportaría la sucesión y cómo se obtiene el enésimo término de tal sucesión. Tenemos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión es de la forma:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots, a_1 r^{n-1}$$

y se llama *sucesión geométrica.*

Sucesión geométrica. Es una sucesión de la forma:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots, a_1 r^{n-1}$$

donde a_1 es el primer término, y r es el factor común de la sucesión entre dos términos consecutivos.

Por lo tanto, el enésimo término de una sucesión aritmética se calcula mediante la expresión:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Si $a_1 = 5$ y $r = 2$, se forma la sucesión geométrica:

$$5,\ 5\times 2,\ 5\times 2^2,\ 5\times 2^3,\ 5\times 2^4,\ \ldots,\ a_n = 5(2)^{n-1}$$

o bien:

$$5,\ 10,\ 20,\ 40,\ 80,\ \ldots,\ a_n = 5(2)^{n-1}.$$

2. La sucesión:

$$4,\ -12,\ 36,\ -108,\ 324,\ \ldots,\ a_n = 4(3)^{n-1}$$

es geométrica con $a_1 = 4$ y $r = -3$. Fíjate que el factor común r se obtiene dividiendo un término consecuente entre el antecedente, $r = \dfrac{-12}{4} = \dfrac{36}{-12} = -3$.

3. Las sucesiones geométricas también se encuentran en la naturaleza. Si una pelota se deja caer desde 2 metros de altura (**Figura 3.1**), rebota sólo $\dfrac{1}{2}$ de su posición inicial, es decir, $2\times\dfrac{1}{2} = 1$. El segundo rebote llega a una altura de es decir, $1\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, y así sucesivamente. Por consiguiente, la altura h_n es la enésima altura en el enésimo rebote y se determina mediante la fórmula siguiente:

$$h_n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

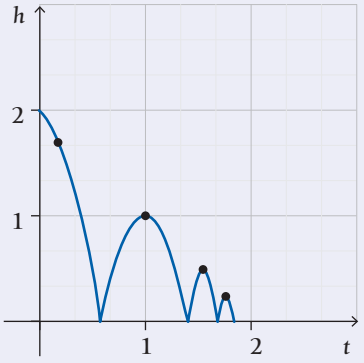


Figura 3.1 Rebote de una pelota.

4. La **Figura 3.2** representa un árbol genealógico con la generación actual (que te incluye) y tres generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si buscaras tu historia familiar hasta 7 generaciones atrás, ¿cuántos antepasados encontrarías sin contar a tus padres?

Solución

Si observas el árbol, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ y $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

Por lo tanto, tenemos:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	2	4	8	16	32	64	128

El total de antepasados sin contar a tus padres son:

$$4+8+16+32+64+128 = 252$$

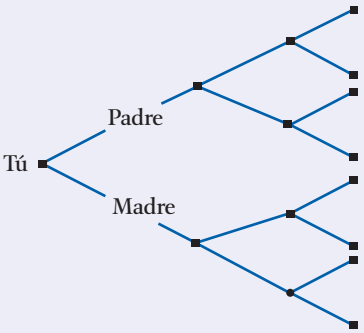


Figura 3.2 Árbol genealógico.

Competencias a desarrollar

- **CG 5.1**
- **CG 5.2**
- **CG 8.2**
- **CDBM 1**
- **CDBM 2**

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2JbmjOc

Actividad de aprendizaje 3

Resuelvan, en equipos de cuatro integrantes, las siguientes situaciones que se te presentan, calculando el enésimo y cualquier término de una sucesión aritmética o geométrica mediante las fórmulas respectivas o determinando la suma de una serie aritmética o geométrica dado cierto término, según corresponda. Recuerda establecer el modelo matemático y darle solución empleando la calculadora. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Se almacenan postes de teléfonos en una pila con 30 postes en la primera fila, 29 en la segunda, y así sucesivamente. Si hay 12 capas, ¿cuántos postes hay en la pila?

2. Una persona recibe una oferta de trabajo con un salario de $325 000 anuales, y le prometen aumentos anuales de $26 000. Demuestra que sus ingresos totales a los 5 años de trabajar serán de $1 885 000. Completa la tabla siguiente para comprobar tus cálculos.

Tiempo	Primer año	Segundo año	Tercer año	Cuarto año	Quinto año
Ingresos					

3. En un cine al aire libre hay lugares para estacionar 26 automóviles en la primera fila, 28 en la segunda, 30 en la tercera, y así sucesivamente. Si hay 17 filas en ese cine, calcula la cantidad de autos que se pueden estacionar.

4. Un arquitecto diseña un teatro con 20 butacas en la primera fila, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente hasta llegar a 62 en la última. Si el teatro debe tener 902 lugares, ¿cuántas filas debe haber en el diseño?

5. Cierta compañía de telefonía celular cobra $2 por el primer minuto y $0.80 por cada minuto adicional. Diseña una expresión algebraica para calcular el costo de una llamada de ***n*** minutos y completa la tabla siguiente que contempla una llamada de 4 minutos.

Minutos	Menos de 1	1	2	3	4
Costo ($)	2				

6. Determina si la sucesión es geométrica. Si lo es, calcula la razón.

Sucesión	Razón
a) 3, 5, 8, 26, …	
b) $7, \frac{7}{5}, \frac{7}{10}, \frac{7}{20}, \ldots$	
c) 1, 5, 9, 13, 17, …	
d) 64, −16, 4, −1, …	

7. Determina la razón, el séptimo y el enésimo término de las sucesiones dadas.

Sucesión	Razón	a_7	a_n
a) 2, 8, 32, …			
b) 448, 224, 112, …			
c) $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$			
d) 6, −18, 54, −162, …			

(Continúa)

(Continuación)

8. Resuelve cada una de las situaciones descritas a continuación.

Situación	Solución
a) El primer término de una sucesión geométrica es 6, y el tercero es 7. Calcula el cuarto término.	
b) El primer término de una sucesión geométrica es 24, y el segundo término es 12. Calcula el quinto término.	
c) La razón de una sucesión geométrica es $\frac{4}{7}$ y el cuarto término es $\frac{7}{4}$. Calcula el tercer término.	

9. Si el valor de un automóvil es de $180 000 y se deprecia un 10% anualmente, ¿cuál será el valor del automóvil después de 6 años? Calcula el valor utilizando la fórmula y comprueba tu resultado completando la tabla siguiente.

Año	1	2	3	4	5	6
Valor del automóvil						

10. En cierto cultivo, el número de bacterias se duplica cada día. Si hay 2 500 bacterias al final del primer día, ¿cuántas habrá después de 7 días? Calcula el valor utilizando la fórmula y comprueba tu resultado completando la tabla siguiente.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Número de bacterias							

11. Una población tiene 180 000 habitantes y crece a razón del 1.3% cada año. Estima la población en 25 años.

Al finalizar la actividad conversen dentro del equipo y reflexionen sobre cómo se sintieron cuando otro de sus compañeros les explicaba el proceso a seguir para resolver el caso expuesto.

Series geométricas finitas

Supón que te propones ahorrar guardando 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo, 4 el tercero y así sucesivamente. Si continúas duplicando la cantidad guardada durante 30 días, ¿cuánto tendrás al final del mes?

Cuando trates de encontrar la respuesta, te darás cuenta de que sería útil tener una fórmula que nos permita obtener la suma de todas esas cantidades de una manera más sencilla.

Para deducir una fórmula que nos permita calcular la suma S_n de los n términos de una sucesión geométrica, tenemos:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

multiplicamos S_n por r y luego lo restamos de S_n. De esta forma, obtenemos:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} \\ rS_n = & \quad - a_1 r - a_1 r^2 - a_1 r^3 - \ldots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n \\ \hline S_n - rS_n = & a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a_1 r^n \end{array}$$

Así:

$$S_n(1-r) = a_1\left(1-r^n\right), \text{ entonces, } S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

Este resultado se puede resumir como sigue:

La suma

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

de los n primeros términos de una sucesión geométrica es igual a:

$$S_n = \frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}; \quad r \neq 1$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Si guardas 1 centavo el primer día, 2 el segundo, 4 el tercero y así sucesivamente. ¿Cuál será la cantidad de dinero total ahorrada al cabo de 30 días?

Solución

Al utilizar la fórmula anterior con $a = 1$ y $n = 30$ se obtiene:

$$S_n = \frac{1\left(1-2^{30}\right)}{1-2} = 1\,073\,741\,823 \quad \text{centavos}$$

Convertimos esa cifra a pesos y vemos que la cantidad total ahorrada es de $10 737 418.23.

2. Determina la suma de los 15 primeros términos de la siguiente sucesión geométrica:

$$3, 1.5, 0.75, 0.375, \ldots$$

(Continúa)

(Continuación)

Solución

La suma requerida de esta sucesión con $a_1 = 3$ y $r = \frac{1.5}{3} = 0.5$ es:

$$S_n = 3\,\frac{1-(0.5)^{15}}{1-0.5} = 5.999816$$

3. Un péndulo recorre una distancia de 30 cm en su primera oscilación. Después recorre 75% de cada una de las oscilaciones anteriores. ¿Cuál es la distancia total recorrida después de 4 oscilaciones?

Solución

Tenemos que encontrar S_4 con $a_1 = 30$ y $r = 0.75$. Esto es:

$$S_n = 30\,\frac{1-(0.75)^{4}}{1-0.75} = 82.03 \text{ cm}$$

Competencias a desarrollar

- **CG 5.1**
- **CG 5.2**
- **CG 8.2**
- **CDBM 1**
- **CDBM 2**

Actividad de aprendizaje 4

Formen equipos de tres integrantes y resuelvan las situaciones que se te presentan a continuación. Para ello tendrán que aplicar sus aprendizajes sobre series geométricas. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Calcula la suma de la sucesión geométrica de acuerdo con las condiciones descritas.

Sucesión geométrica	Suma
a) $a_1 = 3,\ r = 2,\ n = 9$	
b) $a_1 = \frac{4}{5},\ r = \frac{1}{2},\ n = 6$	
c) $a_3 = 28,\ a_6 = 224,\ n = 8$	
d) $a_2 = 0.12,\ a_5 = 0.00096,\ n = 3$	

2. Un péndulo recorre una distancia de 25 cm en su primera oscilación (**Figura 3.3**). Después, recorre 80% de cada una de las oscilaciones anteriores. ¿Cuál es la distancia total recorrida después de 6 oscilaciones?

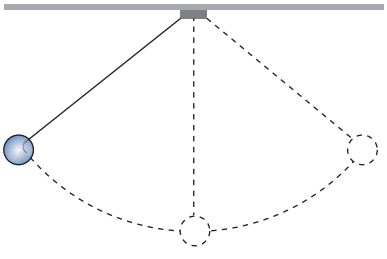


Figura 3.3 Recorrido de un péndulo.

3. La **Figura 3.4** representa un árbol genealógico con la generación actual (que te incluye) y tres generaciones anteriores, con un total de 12 abuelos. Si buscarás tu historia familiar hasta 13 generaciones, ¿cuántos antepasados encontrarías sin contar a tus padres?

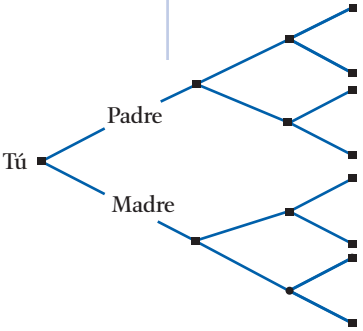


Figura 3.4 Árbol genealógico.

Al finalizar la actividad conversen dentro del equipo y reflexionen sobre cómo se sintieron al realizar el trabajo entre pares.

Series geométricas infinitas

Una serie infinita de la forma:

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots + a_1r^{n-1} + \ldots$$

se llama *serie geométrica infinita* y se puede obtener a partir del razonamiento siguiente:

$$S = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots \qquad \text{Llamamos } S \text{ a la suma infinita.}$$

$$S = a_1 + r\underbrace{\left(a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots\right)}_{S}$$

$$S = a_1 + rS$$

$$S - rS = a_1 \qquad \text{Trasponemos términos.}$$

$$S(1-r) = a_1 \qquad \text{Factorizamos } S.$$

De esta manera, se obtiene la fórmula para encontrar la suma de una serie geométrica infinita. Es decir:

$$S = \frac{a_1}{1-r}; \qquad |r| < 1$$

Este resultado se puede resumir como sigue:

La serie

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots + a_1r^{n-1} + \ldots$$

se llama *serie geométrica infinita* y tiene como suma:

$$S = \frac{a_1}{1-r}; \text{ para } |r| < 1$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Calcula la suma de la serie geométrica infinita siguiente.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

Solución

En primer lugar, identificamos $a_1=\frac{1}{3}$ y $r=\frac{1}{3}$, y aplicamos la fórmula, entonces:

$$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2. Escribe la fracción que representa al decimal periódico $3.6\overline{21}$.

Solución

$$\frac{36}{10}+\frac{21}{1000}+\frac{21}{100\,000}+\frac{21}{10\,000\,000}+\ldots$$

3. En un cuadrado de lado 1 se trazan sucesivamente nuevos cuadrados a partir del punto medio (**Figura 3.5**). Se sabe que el área del cuadrado más grande es $a_1=1$ y que el área del cuadrado que le sigue es $a_2=\frac{1}{2}$. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados.

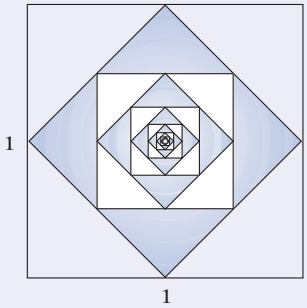


Figura 3.5 Representación de un cuadrado.

Solución

Aplicamos la fórmula $S=\frac{a_1}{1-r}$ con $a_1=1$ y $r=\frac{1}{2}$. De tal modo que:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

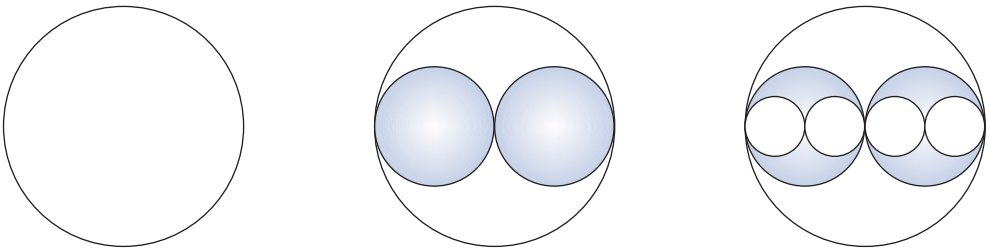
En acción

Resuelve las siguientes situaciones poniendo en acción tus saberes sobre series geométricas infinitas.

1. Calcula la suma de las siguientes sumas geométricas infinitas.

Sucesión geométrica	Suma
a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{36}+\frac{4}{216}+\ldots$	
b) $7-\frac{7}{2}+\frac{7}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$	

2. En un disco circular de radio 2 se dibujan otros dos de la mitad del radio; luego, se trazan cuatro círculos más con la mitad del radio anterior y así indefinidamente. Calcula el área total de todos los discos. Nota: recuerda que el área de un círculo es πr^2.



Actividad de aprendizaje 5

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CG 8.2
- CDBM 1
- CDBM 2

Propongan, en equipos de tres integrantes, modelos para dar solución a las situaciones propuestas por su maestro en clase. Inventen por lo menos dos situaciones de su vida cotidiana donde puedan consolidar lo aprendido en este bloque y resuélvanlas. Colóquenlas en los espacios que se proveen a continuación. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Situación 1

Situación 2

Al finalizar la actividad conversen dentro del equipo y reflexionen sobre cómo se sintieron al realizar la dinámica de trabajo entre pares.

Trabajen sus situaciones con las herramientas que ofrece *ProProfs* (https://bit.ly/2GVFy1K) o *Cram* (https://bit.ly/1aYN1Sg); intenten crear un mapa conceptual con el proceso de solución, para ello, pueden usar *Gliffy* (https://bit.ly/2H9LuEp).

WEB

Consolida lo aprendido en este bloque realizando lo siguiente: **1.** Revisa y analiza los ejemplos de los recursos: https://bit.ly/2qIzzmL y https://bit.ly/2JdAmmy; **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos elijan uno de los temas estudiados en el bloque, repásenlo y redacten un resumen; **3.** Con las notas de su resumen, creen un video y una serie de 5 ejercicios interactivos (usen *ProProfs* [https://bit.ly/2GVFy1K] o *QuizWorks* https://bit.ly/2ErnXbC]); **4.** Presenten su video ante el grupo y compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Conexiones

Las nociones matemáticas que has aprendido hasta el momento son muy importantes para interpretar y cuantificar tu realidad, es decir, tienen utilidad en todas las áreas de la ciencia, y por tanto, en las asignaturas que abordas en el Bachillerato. Te invitamos a que pruebes ésto y descubras cómo se relaciona la asignatura de Matemáticas 1 con Química 1, Informática 1 y Taller de lectura y redacción 1. Para ello, investiga cómo se llegó al orden de los elementos químicos en la tabla periódica actual. Una vez que tengas dicha información elabora un ensayo, usando un *software* computacional, en el cual se destaque la importancia de los temas vistos en este bloque en la elaboración de la tabla periódica.

SOMOS IGUALES

¿Sabías que tú defines tus propios límites y puedes lograr lo que te propongas? La preparación y constancia son determinantes indispensables para alcanzar tus metas. Prueba de ello fue la vida y obra del matemático indio Srinivasa Aiyangar Ramanujan. Aunque fue por mucho tiempo autodidacta, hizo grandes contribuciones al mundo de las matemáticas, entre las que se destacan las que hizo en la teoría de números, el análisis matemático, las fracciones continuas y las series infinitas. Además, tuvo que superar una fuerte discriminación racial e intelectual. Conoce más al respecto en los vínculos siguientes:
https://bit.ly/2K4sMMe
https://bit.ly/2JcmHfu

Habilidad matemática

1. En la progresión aritmética 1, 5, 9, 13, 17,…, el cálculo del valor del término 20 y el valor de la sumatoria de los 20 términos es:

a) $a_{20} = 69$ y $S_{20} = 656$
b) $a_{20} = 77$ y $S_{20} = 780$
c) $a_{20} = 84$ y $S_{20} = 932$
d) $a_{20} = 69$ y $S_{20} = 887$

2. En la progresión geométrica 4, 12, 36,…, el cálculo del término 10 y la suma de los primeros 10 términos es:

a) $a_{10} = 69\,565$ y $S_{10} = 95\,656$
b) $a_{10} = 78\,732$ y $S_{10} = 118\,096$
c) $a_{10} = 83\,211$ y $S_{10} = 126\,567$
d) $a_{10} = 65\,759$ y $S_{10} = 137\,982$

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

1. ¿Qué es una progresión numérica y una sucesión aritmética?

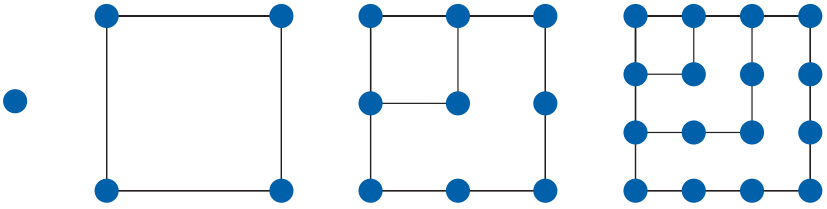
2. ¿Qué forma tiene el enésimo término de una sucesión aritmética?

3. ¿Qué es un modelo aritmético?

Matemáticas gráficas

4. Determina el enésimo término de cada una de las siguientes configuraciones de puntos y muestra gráficamente el quinto término de dichos números.

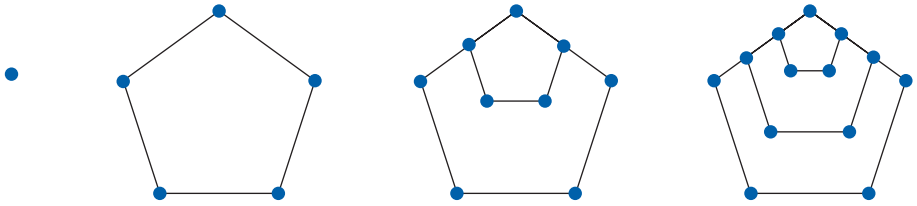
a) Números cuadrados



(*Continúa*)

(Continuación)

b) Números pentagonales



Ejercicios numéricos

Realiza, en tu cuaderno, lo que se indica a continuación.

5. Escribe los primeros siete términos de las siguientes sucesiones.

a) $\frac{(-1)^n}{2n+1}$

b) $\frac{a_n}{n+1}$

c) $\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

d) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}$

e) $\frac{n}{\sqrt{n}}$

f) $\frac{2n+1}{n^2}$

g) $\frac{n(n+1)}{2}$

h) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n^2}$

6. Calcula la suma de la sucesión geométrica de acuerdo con las condiciones indicadas.

a) $a_1=5,\ r=2,\ n=15$

b) $a_1=25,\ r=5,\ n=40$

c) $a_2=\frac{3}{5},\ a_3=\frac{9}{25}, n=10$

d) $a_1=30,\ r=1,\ n=40$

e) $a_2=-\frac{1}{2},\ a_5=\frac{1}{16},\ n=6$

f) $a_3=27,\ a_5=243,\ n=4$

7. Calcula la suma de las siguientes series geométricas infinitas.

a) $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\frac{5}{81}+\ldots$

b) $2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\ldots$

c) $6+3+\frac{6}{4}+\ldots$

d) $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{80}+\ldots$

Problemas de aplicación

8. Una compañía de telefonía apila en sus almacenes 135 postes para el cableado de sus líneas de forma tal que la base tendrá el doble de postes que la última capa, y la diferencia de postes entre cada una de las capas es igual a 1. ¿Cuántos postes debe tener la última capa?

9. La mamá de María le abrió una cuenta bancaria cuando cumplió 15 años, la cual pagaba el 8% de interés anual con pagos trimestrales. Si en la actualidad su cuenta es de $7 218.27, y María está festejado su cumpleaños 30. ¿Cuál fue la inversión inicial?

10. Las sillas del salón audiovisual de la escuela de Arturo están dispuestas de la siguiente manera, en la primera fila tiene 20 asientos y cada fila tiene dos asientos más que la fila anterior, ¿cuántas personas se pueden sentar en la novena fila?

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este tercer bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Explico regularidades de sucesiones, siendo perseverante en la búsqueda de patrones que se encuentran en mi entorno.				
Resuelvo colaborativamente e interpreto problemas reales o hipotéticos que presentan relación con sucesiones y series para modelar distintos fenómenos de mi localidad.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.
Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.

Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 333 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Apliquen, en equipos de cuatro integrantes, sus aprendizajes sobre sucesiones aritméticas en la resolución de las situaciones que se presentan a continuación.	Ejercicios resueltos.	Pág. 63.	Lista de cotejo.
Resuelvan, en binas, la siguiente situación aplicando sus saberes sobre series aritméticas.	Problema resuelto.	Pág. 65.	Rúbrica.
Resuelvan, en equipos de cuatro integrantes, las siguientes situaciones que se te presentan, calculando el enésimo y cualquier término de una sucesión aritmética o geométrica mediante las fórmulas respectivas o determinando la suma de una serie aritmética o geométrica dado cierto término, según corresponda. Recuerda establecer el modelo matemático y darle solución empleando la calculadora.	Ejercicios resueltos.	Pág. 68.	Lista de cotejo.
Formen equipos de tres integrantes y resuelvan las situaciones que se te presentan a continuación. Para ello tendrán que aplicar sus aprendizajes sobre series geométricas.	Problemas resueltos.	Pág. 72.	Rúbrica.
Propongan, en equipos de tres integrantes, modelos para dar solución a las situaciones propuestas por su maestro en clase. Inventen por lo menos dos situaciones de su vida cotidiana donde puedan consolidar lo aprendido en este bloque y resuélvanlas.	Modelos de situaciones propuestas o mapa conceptual.	Pág. 75.	Escala estimativa.

BLOQUE 4

Modelos de probabilidad y estadística

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
15 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Aplica modelos tanto estadísticos como probabilísticos para analizar, interpretar y comunicar la información de fenómenos naturales y sociales.

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES	
Interdisciplinariedad	**Ejes transversales**
Taller de Lectura y Redacción 1 Informática 1 Ética 1 Metodología de la investigación	Eje transversal Social Eje transversal Ambiental Eje transversal de la Salud Eje transversal de Habilidades lectoras

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
CG 4.5 Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.
CG 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM 7 Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertenencia.
CDBM 8 Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

CONOCIMIENTOS

- Conceptos básicos de estadística descriptiva.
  - Medidas de tendencia central.
    - Media.
    - Mediana.
    - Moda.
  - Medidas de dispersión.
    - Rango.
    - Varianza.
    - Desviación típica o estándar.
  - Gráficos.
    - De pastel.
    - De barras.
    - Histograma.
- Probabilidad.
  - Conceptos básicos de probabilidad.
  - Ley aditiva.
  - Ley multiplicativa.

ACTITUDES

- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.
- Actúa de manera congruente y consciente previniendo riesgos.
- Toma decisiones de manera consciente e informada asumiendo las consecuencias.

HABILIDADES

- Reconoce medidas de centralización y dispersión.
- Representa la información en tablas, gráficas y diagramas.
- Describe fenómenos naturales y sociales utilizando la estadística.
- Identifica cuándo aproximarse a la solución de un problema utilizando un enfoque determinista o aleatorio.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Utiliza medidas de tendencia central y de dispersión para interpretar de forma crítica y consciente un fenómeno social o natural.
- Organiza y representa información mediante métodos gráficos, proponiendo formas innovadoras de solución a diversas problemáticas de su entorno.
- Evalúa los posibles resultados de un fenómeno social o natural a partir de la elección de un enfoque determinista o aleatorio.

Aplicar modelos tanto estadísticos como probabilísticos para analizar, interpretar y comunicar la información de fenómenos naturales y sociales

Requiere

Saber conocer

- Conceptos básicos de estadística descriptiva
  - Medidas de tendencia central
    - Media
    - Mediana
    - Moda
  - Medidas de dispersión
    - Rango
    - Varianza
    - Desviación típica o estándar
  - Gráficos
    - De pastel
    - De barras
    - Histograma
- Probabilidad
  - Conceptos básicos de probabilidad
  - Ley aditiva
  - Ley multiplicativa

Saber hacer

Lo cual implica

- Reconocer medidas de centralización y dispersión
- Representar la información en tablas, gráficas y diagramas
- Describir fenómenos naturales y sociales utilizando la estadística
- Identificar cuándo aproximarse a la solución de un problema utilizando un enfoque determinista o aleatorio

Saber vivir juntos

- Relacionándote con tus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado
- Actuando de manera congruente y consciente previniendo riesgos
- Tomando decisiones de manera consciente e informada asumiendo consecuencias

Saber ser

- Utilizando medidas de tendencia central y de dispersión para interpretar de forma crítica y consciente un fenómeno social o natural
- Organizando y representando información mediante métodos gráficos, proponiendo formas innovadoras de solución a diversas problemáticas de tu entorno
- Evaluando los posibles resultados de un fenómeno social o natural a partir de la elección de un enfoque determinista o aleatorio

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. Parte de las matemáticas que nos ayuda a predecir el resultado de un proceso:
a) Álgebra.
b) Mercadeo.
c) Estadística.
d) Factibilidad.

2. Conjunto de datos significativos de una población:
a) Muestra.
b) Gráfico.
c) Variable.
d) Parámetro.

3. Es una medida que representa la variabilidad de un conjunto de datos:
a) Moda.
b) Media.
c) Mediana.
d) Desviación.

4. Si se lanzan dos monedas al aire, ¿cuántos eventos posibles pueden ocurrir?
a) 2
b) 4
c) 8
d) 6

5. Escribe tu idea acerca del estudio de la estadística.

6. Define el concepto de población.

7. Define el concepto de muestra.

8. Define espacio muestral.

Conceptos básicos de estadística descriptiva

¿Sabias que cualquiera de tus acciones son parte de una estadística?, o que los supermercados ocupan la estadística para saber qué tipo de productos vender en cada una de las localidades. Estadísticamente, está comprobado que en temporada de lluvias usarás pantalones oscuros, ¿lo puedes creer?

En acción

La gráfica siguiente muestra el comportamiento histórico de la creación de empleos en México desde agosto de 1997 hasta el mismo periodo de 2016.

Fuente. IMSS

En relación con la gráfica anterior contesta lo siguiente:

- ¿Cuándo tuvo su peor desempeño la creación del empleo?

- ¿Cómo interpretas el comportamiento del empleo desde 1997 hasta 2016?

- ¿Cuál fue el promedio de la creación de empleos de 2012 a 2016?

- ¿Qué relación muestra la gráfica entre el empleo y la realidad económica de México?

- Reflexiona sobre el proceso que realiza el **Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI)** para obtener la información como la que se representa en la gráfica.

- Investiga en Internet la importancia que tiene para nuestro país contar con el INEGI como una fuente de información estadística.

GLOSARIO

Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI). Organismo encargado de captar, procesar y difundir información sobre el territorio, la población y la economía mexicana.

Para realizar esta actividad puedes apoyarte en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/1kSHSEG

En acción

Busca en el INEGI información sobre la deserción escolar desde el nivel básico hasta ingresar al nivel profesional.

Consulta la competitividad educativa de México en el marco de los países que integran la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y el porcentaje del producto interno bruto (PIB) que destina México a la educación; establece una comparación de esas cifras con las del resto de países que integran la OCDE. Realiza un cuadro comparativo con la información recabada.

Para realizar esta actividad puedes apoyarte en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/2xIqwme

Seguramente te preguntarás qué es la estadística y cómo funciona. Como veremos, la estadística nos ayuda a resolver diversas situaciones de la vida real.

Antes de proponer una definición, revisemos varias situaciones que interesarían a cualquier persona:

- Predecir los resultados de una elección.
- Saber cuántos son los potenciales compradores de un artículo o una marca determinados.
- Conocer la calidad educativa de nuestro país.
- Saber el número de hogares que cuentan con agua potable.
- Determinar la calidad de los artículos producidos por una fábrica.

Es por ello que debemos ser capaces de responder las preguntas siguientes: ¿cómo encontrar modelos que nos lleven a predecir el patrón de comportamiento de las situaciones mencionadas anteriormente? ¿Esos modelos servirán para tomar decisiones acerca de una población?

Todas las cuestiones anteriores se pueden resolver con un alto grado de confianza, si de cada situación que contiene un gran número de datos (*población*) obtenemos una *muestra* representativa a través de la investigación estadística. Para ello es necesario comprender las siguientes definiciones y expresiones esenciales:

- **Población**. Es la recolección completa de todas las observaciones o los datos de interés que son motivo de estudio. Por ejemplo, los estudiantes de bachillerato.
- **Muestra.** Es una parte representativa de la población que se selecciona para ser estudiada. Por ejemplo, los estudiantes de bachillerato que cursan estadística.

- **Variable.** Característica de interés de la muestra o población que se está observando. Por ejemplo, la competitividad de los estudiantes de matemáticas.
- **Variable cualitativa o categórica.** Variable que clasifica o describe un elemento de una población. Por ejemplo, los estudiantes destacados en matemáticas.
- **Variable cuantitativa o numérica.** Variable que cuantifica un elemento de una población. Por ejemplo, el porcentaje de descuento en los libros de matemáticas.
- **Datos.** Conjunto de valores recolectados para la variable de cada elemento que pertenece a la muestra.
- **Experimento.** Actividad planeada cuyos resultados producen un conjunto de datos.
- **Parámetro.** Valor numérico que resume todos los datos de una población completa.
- **Estadístico.** Valor numérico que resume los datos de la muestra.
- **Estadística.** Ciencia dedicada a la recolección, la organización, la presentación, el análisis y la interpretación de datos. Se divide en estadística descriptiva y estadística inferencial.
- **Estadística descriptiva.** Es la parte que recolecta, presenta y describe datos de una muestra.
- **Estadística inferencial.** Es la parte que interpreta los valores que resultan de las técnicas descriptivas y la toma de decisiones para obtener conclusiones acerca de la población.

En acción

1. La oficina de control escolar de un colegio desea calcular el costo de los libros de texto para los estudiantes. Sea x la variable del costo total de todos los libros de texto adquiridos por un estudiante en el presente semestre. El plan es identificar aleatoriamente a 100 estudiantes y obtener los costos totales por concepto de libros de texto. El costo promedio de los libros para los 100 estudiantes se utilizará para estimar el costo promedio para todos los estudiantes.

a) Describe el parámetro que desea estimar control escolar.

b) Describe la población.

c) Describe la variable implicada.

d) Describe la muestra.

2. Identifica las expresiones siguientes como ejemplos de variables cualitativas o cuantitativas.

a) La resistencia a la rotura de una cuerda.

b) El color de cabello de un grupo de niños.

c) El número de estudiantes de un concurso de canto.

d) Si una pieza mecánica es o no defectuosa.

e) El número de aciertos en un examen.

f) El tiempo que hay que esperar en una fila para ser atendido.

3. Supón que un niño de 12 años te pide que le expliques la diferencia entre una muestra y una población.

a) ¿Qué información incluirías en tu respuesta?

b) ¿Por qué sería conveniente comentarle las ventajas de tomar una muestra en vez de encuestar a toda la población?

4. Supón que un niño de 12 años te pide que le expliques la diferencia entre un estadístico y un parámetro. ¿Qué información incluirías en tu respuesta?

Para realizar esta actividad puedes apoyarte en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/2v9H5vz

Cuando se tiene un gran número de datos y no están ordenados, no es fácil describir o concluir información valiosa acerca de ellos.

En acción

El conjunto de datos de la **Tabla 4.1** corresponde a las calificaciones de 50 estudiantes de estadística elemental.

Tabla 4.1 Calificaciones del examen de estadística.

60	47	82	95	88	72	67	66	68	98
90	77	86	58	64	95	74	72	88	74
58	39	90	63	68	97	70	64	70	70
77	78	89	44	55	85	82	83	72	72
72	86	50	94	92	80	91	75	76	78

(Continúa)

(Continuación)

En relación con estas calificaciones contesta las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es la calificación más baja y cuál la más alta?

b) ¿Cuántos estudiantes están en el intervalo de calificaciones 70 a 75?

c) ¿Cuál es el promedio del grupo?

d) ¿Cuál es la calificación que aparece con más frecuencia?

Cuando se tiene un conjunto de datos como el anterior, es útil agrupar o distribuir los datos con la ayuda de una **distribución de frecuencias**. Una distribución de esta naturaleza es un arreglo en forma de tabla que asocia cada valor de una variable con el número de veces que se presenta (*frecuencia*).

Si llamamos x a la variable en estudio, una posible agrupación de las calificaciones en categorías o clases se presenta en la tabla siguiente:

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f
1	$35 \leq x < 45$	||	2
2	$45 \leq x < 55$	||	2
3	$55 \leq x < 65$	𝍸 ||	7
4	$65 \leq x < 75$	𝍸 𝍸 ||||	14
5	$75 \leq x < 85$	𝍸 𝍸	10
6	$85 \leq x < 95$	𝍸 𝍸 |	11
7	$95 \leq x < 100$	||||	4
			50

Como puedes ver, una tabla con esta estructura nos ayuda a responder fácilmente las preguntas de la actividad anterior. ¿Cuál es el procedimiento para su elaboración?

Procedimiento

1. Determina c, el *número de clases* o *categorías,* con la expresión $2^c \geq n$.
   En este caso $n = 50$, es decir, el número de calificaciones; y $c = 7$ es una bue na aproximación; por conveniencia, $2^7 > 50$.
2. Identifica los datos *máximo* (98) y *mínimo* (39) y determina el *rango.*

$$\text{Rango} = 98 - 39 = 59$$

3. Tamaño del intervalo de clase. Es el rango dividido entre el número deseado de clases *c*.

$$IC = \frac{\text{Rango}}{c}$$

En nuestro ejemplo, el tamaño es $IC = \frac{98-39}{7} \approx 8.4$. Como 8.4 es un número poco práctico, el intervalo puede ajustarse un poco hacia arriba o hacia abajo. Por razones de conveniencia, el tamaño del intervalo se seleccionó de 10 para formar la tabla.

4. Elige un valor inicial, que debe ser algo menor que la calificación mínima, para determinar la primera clase o categoría. Aquí suponemos que empieza en 35; por lo tanto, la primera clase es $35 \leq x < 45$ y así sucesivamente hasta completar la tabla. Los números 35 y 45 se llaman *límite inferior* y *límite superior* de clase, respectivamente.

5. Por último, se efectúa un *conteo* marcando dato por dato para obtener la columna de la *frecuencia*. Por otro lado, la **marca de clase** es el *punto medio de cada clase* y es el valor numérico que representa a cada clase. Éste se obtiene al sumar los límites inferior y superior de cada clase y dividirlos entre dos. Si agregamos esta columna a la tabla anterior, queda de la siguiente manera:

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia *f*	Marca de clase *x*
1	$35 \leq x < 45$	||	2	40
2	$45 \leq x < 55$	||	2	50
3	$55 \leq x < 65$	𝍸 ||	7	60
4	$65 \leq x < 75$	𝍸 𝍸 ||||	14	70
5	$75 \leq x < 85$	𝍸 𝍸	10	80
6	$85 \leq x < 95$	𝍸 𝍸 |	11	90
7	$95 \leq x < 100$	||||	4	100
			50	

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central son valores numéricos que localizan, de alguna manera, el centro de un conjunto de datos. En este bloque estudiaremos tres tipos de medidas de tendencia central: la media, mediana y moda.

Media

Las calificaciones de 12 estudiantes se muestran en la tabla siguiente. Calcula el promedio del grupo.

6	8	7	6
10	10	7	7
9	8	7	6

Seguramente, sumaste los números y dividiste el resultado entre 12. Los datos nos sugieren que es mejor organizarlos de la siguiente manera:

x	f	fx
6	3	$(3)(6) = 18$
7	4	$(4)(7) = 28$
8	2	$(2)(8) = 16$
9	1	$(1)(9) = 9$
10	2	$(2)(10) = 20$
		$\sum fx = 91$

En la tabla anterior, f es la frecuencia con que se presenta el dato x, y el símbolo fx es el producto de la calificación por su frecuencia. $\sum fx$ significa la suma de dicho producto. Así, el promedio de calificaciones es:

$$\text{promedio} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{91}{12} \approx 7.6$$

Este promedio se llama **media aritmética** y se representa por $\bar{x}$ (se lee x testada) y se calcula con la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_nx_n}{n},$$

donde n es el número total de datos o la frecuencia total.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

Calcula la media aritmética de la distribución de frecuencias de las 50 calificaciones de estadística que vimos en la tabla 4.1 al iniciar el bloque y que se muestra a continuación.

Calificaciones del examen de estadística									
60	47	82	95	88	72	67	66	68	98
90	77	86	58	64	95	74	72	88	74
58	39	90	63	68	97	70	64	70	70
77	78	89	44	55	85	82	83	72	72
72	86	50	94	92	80	91	75	76	78

Para calcular la media aritmética, basta con incluir la columna de fx en la distribución de frecuencias que elaboramos como se muestra en la tabla siguiente.

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase, x	fx
1	$35 \leq x < 45$	||	2	40	80
2	$45 \leq x < 55$	||	2	50	100

3	$55 \leq x < 65$	𝍸 ||	7	60	420
4	$65 \leq x < 75$	𝍸 𝍸 ||||	14	70	980
5	$75 \leq x < 85$	𝍸 𝍸	10	80	800
6	$85 \leq x < 95$	𝍸 𝍸 |	11	90	990
7	$95 \leq x < 100$	||||	4	100	400
			$n = 50$		$\sum fx = 3\,770$

Por lo tanto, la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{3\ 770}{50} \approx 75.4$$

En acción

Analiza detenidamente cada una de las situaciones que se presentan a continuación, pon en acción tus saberes y resuelve según corresponda.

1. La tabla siguiente muestra 20 medidas del tiempo de respuesta en segundos de un nuevo **chip** que se está lanzando al mercado. Calcula la media aritmética de las medidas, supón que este estadístico es el más favorable para presentar el producto.

Tiempos				
3.2	4.1	6.3	1.9	0.6
5.4	5.2	3.2	4.9	6.2
1.8	1.7	3.6	1.5	2.6
4.3	6.1	2.4	2.2	3.3

$\bar{x} =$

GLOSARIO

Chip. Pieza pequeña que se integra de múltiples circuitos con los que se realizan numerosas funciones en computadoras y dispositivos electrónicos.

2. Las 40 cantidades, que se muestran en la tabla siguiente, representan el costo de paquetería de una empresa que se encarga de entregar bultos pequeños en un día determinado. Calcula la media aritmética de ese día.

40	35	31	60	56	31	29	38	43	38
45	35	45	51	28	51	54	38	68	49
36	36	38	37	41	40	37	57	78	46
48	28	50	52	40	54	46	38	40	30

(Continúa)

(Continuación)

Elabora una tabla de frecuencias y calcula su media aritmética.

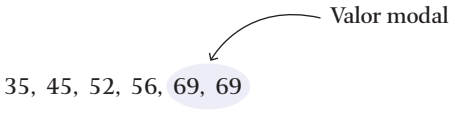
Número de clases	Clases	Conteo de clases	f	x	fx

$\bar{x} =$

Comprueba los resultados que obtuviste en esta actividad utilizando la calculadora estadística, la cual encontrarás en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2GZGdeu

Mediana

La *mediana* $\tilde{x}$ de un conjunto de datos ordenados es el valor central de ellos. También se llama media posicional. Por ejemplo, la mediana de los siguientes datos es 56.



Si el número de datos es par, entonces, la mediana es el promedio de los dos valores centrales. Por ejemplo, la mediana de 35, 45, 52, 56, 69, 69 es:

$$\tilde{x} = \frac{52 + 56}{2} = 54$$

Cuando los datos están agrupados en una distribución de frecuencias, la mediana se puede calcular con la expresión:

$$\tilde{x} = L_1 + \left[\frac{\frac{n}{2} - \left(\sum f\right)_1}{f_{mediana}}\right] c$$

Donde: L_1 es el límite inferior de la clase que contiene la mediana (aproximadamente en la mitad de los datos).
n es el total de datos.
$\left(\sum f\right)_1$ es la suma de frecuencias que está por debajo de la clase que contiene la mediana.
$f_{mediana}$ es la frecuencia de la clase que contiene la mediana.
c es el tamaño del intervalo de clase.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

Calcula la mediana de la distribución de frecuencias de los 50 estudiantes de estadística que vimos en la tabla 4.1 al iniciar el bloque.

Solución

Observa, en la tabla de frecuencias siguiente, que la clase $65 \leq x < 75$ es la que contiene la mediana porque ahí está el dato 25, es decir, la mitad de los 50 datos.

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase, x
1	$35 \leq x < 45$	||	2	40
2	$45 \leq x < 55$	||	2	50
3	$55 \leq x < 65$	𝍸 ||	7	60
4	$65 \leq x < 75$	𝍸 𝍸 ||||	14	70
5	$75 \leq x < 85$	𝍸 𝍸	10	80
6	$85 \leq x < 95$	𝍸 𝍸 |	11	90
7	$95 \leq x < 100$	||||	4	100
			50	

Aquí está el dato 25 y por tanto la mediana.

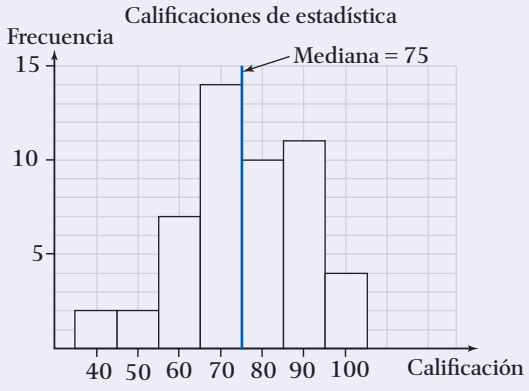
De este modo, tenemos que:

$$L_1 = 65,\ \frac{n}{2} = 25,\ \left(\sum f\right)_1 = 2+2+7 = 11,\ f_{mediana} = 14,\ c = 10$$

Por lo tanto, la mediana es:

$$\tilde{x} = L_1 + \left[\frac{\frac{n}{2} - \left(\sum f\right)_1}{f_{mediana}}\right] c = 65 + \left[\frac{25-11}{14}\right](10) \approx 75$$

Geométricamente, la mediana corresponde a una recta vertical que divide a un histograma en dos partes de igual área como se ilustra en la figura siguiente.



Moda

La moda $\hat{x}$ es el valor que se presenta con mayor frecuencia. Por ejemplo, la moda de los siguientes datos es 69.

Valor modal

35, 45, 52, 56, 69, 69

A veces ocurre que los datos pueden tener más de una moda. Por ejemplo, la serie siguiente tiene dos modas y, por eso, se llama bimodal.

35, 45, 52, 52, 52, 56, 69, 69

Si los datos están agrupados, la moda estará en la clase que tiene mayor frecuencia y se puede calcular con la fórmula:

$$Moda = \hat{x} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)c$$

Donde: L_1 es el límite inferior de la clase que contiene la moda.

Δ_1 es la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la clase que le antecede.

Δ_2 es la diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la clase que le sigue.

c es el tamaño del intervalo de clase.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

Calcula la moda de la distribución de frecuencias de los 50 estudiantes de estadística que vimos en la tabla 4.1 al iniciar el bloque.

Solución

Observa que la clase $65 \leq x < 75$ es la que contiene la moda porque es la de mayor frecuencia.

Aquí está la moda, por que ocurre la mayor frecuencia

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase, x
1	$35 \leq x < 45$	||	2	40
2	$45 \leq x < 55$	||	2	50
3	$55 \leq x < 65$	𝍸 ||	7	60
4	$65 \leq x < 75$	𝍸 𝍸 ||||	14	70
5	$75 \leq x < 85$	𝍸 𝍸	10	80
6	$85 \leq x < 95$	𝍸 𝍸 |	11	90
7	$95 \leq x < 100$	||||	4	100
			50	

De este modo, tenemos que:
$L_1 = 65,\ \Delta_1 = 14 - 7 = 7,\ \Delta_2 = 14 - 10 = 4,\ c = 10$

Por lo tanto, la moda es:

$$Moda = \hat{x} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)c = 65 + \left(\frac{7}{7+4}\right)(10) = 71.36$$

Actividad de aprendizaje 1

Competencias a desarrollar

- **CG 4.1**
- **CG 4.5**
- **CG 5.2**
- **CG 5.6**
- **CDBM 8**

Analiza detenidamente cada una de las situaciones que se presentan a continuación y resuelve aplicando tus aprendizajes sobre medidas de tendencia central. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. Cierto periódico, en su sección de negocios, reportó que en 1996 las utilidades en millones de dólares de varias de las compañías que mejor cotizaron en la bolsa, éstas eran:

Exxon	7 510	General Electric	7 280
Philip Morris	6 246	IBM	5 429
Intel	5 157	General Motors	4 289

$\bar{x} =$
$\tilde{x} =$
$\hat{x} =$

Calcula la media aritmética, la mediana y la moda, si las hay.

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2qwi1ds

2. Los datos de la tabla siguiente son ingresos de 40 ejecutivos de empresas en México. Los datos están expresados en miles de dólares.

58	64	79	74	69	71	65	55	73	40
76	76	74	38	62	54	79	75	72	50
45	65	71	79	38	69	46	57	69	61
67	45	85	61	69	62	77	77	51	69

Completa la tabla de frecuencias siguiente y calcula la media aritmética, la mediana y la moda.

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase, x	fx
1	$36 \leq x < 44$				
2	$44 \leq x < 52$				

(Continúa)

(Continuación)

3	$52 \leq x < 60$				
4					
5					
6					

Comprueba los resultados que obtuviste en esta actividad utilizando la calculadora estadística, la cual encontrarás en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2GW2bTu

La **Tabla 4.2** muestra un resumen de algunas propiedades de la media, mediana y moda.

Tabla 4.2 Propiedades de la media, mediana y moda.

Medida	Definición	Utilidad	Existencia	¿Todos los valores cuentan?	¿Le afectan los valores extremos?	Ventajas y desventajas
Media	$\tilde{x} = \frac{\sum x}{n}$	Promedio más conocido	Siempre existe	Sí	Sí	Funciona con muchos estadísticos
Mediana	Valor central	De uso común	Siempre existe	No	No	Es una buena opción cuando afectan los valores extremos
Moda	Valor más frecuente	Se usa en ocasiones	Puede no existir o haber varias	No	No	Para datos en nivel nominal

Medidas de dispersión

En acción

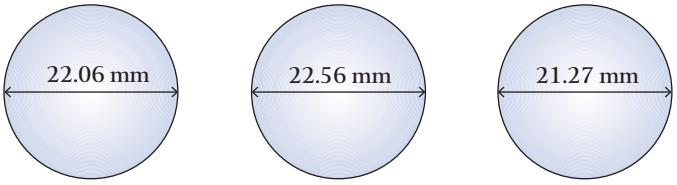
1. ¿De qué manera podrías conocer la forma en la que varía un fenómeno a través del tiempo?

2. ¿Cuál es la utilidad de conocer esta información?

3. ¿En qué situaciones de tu vida cotidiana aplicas medidas de dispersión?

Uno de los conceptos más relevantes en la estadística es la variación que tienen los datos entre sí. Por eso es muy importante que primero comprendas el concepto de variación en los procesos y después aprendas a calcular las medidas de variación con fórmulas.

Por ejemplo, los cojinetes de la figura siguiente tienen diámetros con diferencias mínimas porque así resultan después de su producción. Si un fabricante de baleros necesita una medida muy exacta, el proveedor debe tomar en cuenta las variaciones que puedan existir respecto al diámetro, ya que si estas variaciones rebasan las expectativas del cliente, se rechazará la producción.



Otro ejemplo de variabilidad son las filas de espera en los diferentes bancos. Algunas instituciones bancarias anuncian el tiempo promedio de espera para el cliente, pero si los clientes perciben que las variaciones de tiempo respecto al promedio de tiempo anunciado son grandes, entonces, optarán por otros bancos. He aquí la importancia de la variabilidad en los procesos.

Rango

El *rango* de un conjunto de datos es la diferencia entre el *valor máximo* y el *valor mínimo*, es decir:

$$Rango = Valor\ máximo - Valor\ mínimo$$

Varianza

La *varianza*, s^2, sirve para determinar la variación de cada valor de un conjunto de datos con respecto a la media y se puede calcular mediante la expresión siguiente:

$$s^2 = \frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n - 1}$$

Varianza para datos agrupados

Para determinar la varianza de un conjunto de datos cuando éstos están agrupados en una distribución de frecuencias se debe considerar la frecuencia con que se presentan los datos. Por consiguiente, la expresión para calcular la varianza queda de la forma siguiente:

$$s^2 = \frac{\sum f(x - \overline{x})^2}{n - 1}$$

Desviación típica o estándar

La desviación estándar es, por lo general, la medida de variación más importante y útil para darnos cuenta de la calidad de los procesos, y se define de la siguiente manera:

La *desviación estándar*, s, de una muestra es la medida de variación de los valores de un conjunto de datos respecto a la media. Se puede calcular con la siguiente expresión:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n - 1}}$$

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

En una sucursal bancaria, los tiempos de espera en minutos para atender a los clientes fueron 2, 5 y 14. Calcula la desviación estándar.

Solución

Paso 1. Se calcula la media de los datos, es decir:

$$\bar{x} = \frac{21}{3} = 7$$

Paso 2. Se resta de cada valor x la media $\bar{x} = 7$ para obtener los valores de $x - \bar{x}$: $-5, -2, 7$.
Paso 3. Se elevan al cuadrado los valores del paso 2 para obtener $(x - \bar{x})^2$: 25, 4, 49.
Paso 4. Se suman los valores anteriores para obtener $\sum (x - \bar{x})^2 = 78$.
Paso 5. Calculamos la desviación estándar, es decir:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{78}{3-1}} \approx 6.24$$

Tiempos de espera en una sucursal bancaria		
x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
2	-5	25
5	-2	4
14	7	49
$\sum x = 21$	$\sum (x - \bar{x})^2 = 78$	
$\bar{x} = \frac{21}{3} = 7$	$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{78}{3-1}} \approx 6.24$ minutos	

En acción

Utiliza la tabla siguiente para calcular la desviación estándar de los números 6, 3, 8, 5 y 2.

Desviación estándar de 6, 3, 8, 5 y 2		
x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
$\sum x =$		$\sum (x - \bar{x})^2 =$
$\bar{x} =$	$s = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n-1}} =$	

Comprueba los resultados que obtuviste en esta actividad utilizando la calculadora estadística, la cual encontrarás en el siguiente: https://bit.ly/2GW2bTu

Desviación estándar para datos agrupados

La forma de obtener la desviación estándar cuando los datos están agrupados en una distribución de frecuencias es prácticamente igual, excepto porque hay que considerar la frecuencia con que se presentan los datos. Así, la fórmula es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

Calcula la desviación estándar y la varianza de la distribución de frecuencias de los 50 estudiantes de estadística que hemos venido estudiando hasta ahora.

Calificaciones de 50 estudiantes de estadística					
x	f	fx	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
40	2	80	−35.4	1 253.2	2 506.3
50	2	100	−25.4	645.2	1 290.3
60	7	420	−15.4	237.2	1 660.1
70	14	980	−5.4	29.2	408.2
80	10	800	4.6	21.2	211.6
90	11	990	14.6	213.2	2 344.8
100	4	400	24.6	605.2	2 420.6
	$n = 50$	$\sum fx = 3\ 770$			$\sum f(x-\bar{x})^2 = 10842.0$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n} = \frac{3\ 770}{50} = 75.4$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{10842.0}{50-1}} \approx 15$$

$$s^2 \approx 225$$

En acción

Formen equipos de tres integrantes y analicen la información de las tablas siguientes. Calculen la desviación estándar de cada una de las distribuciones que se presentan a continuación. Recuerden que si alguno de sus compañeros tiene dudas acerca de un tema en particular, conversen con él sobre el procedimiento que tiene que seguir para llegar al resultado correcto.

Nivel de nicotina en una muestra de 40 fumadores					
x	f	fx	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
49.5	11				
149.5	12				
249.5	14				

(Continúa)

(Continuación)

349.5	1				
449.5	2				
	$n=$	$\sum fx=$			$\sum f(x-\bar{x})^2=$
$\bar{x}=\dfrac{\sum fx}{n}=$			$s=\sqrt{\dfrac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}}=$ $s^2\approx$		

Pasajeros diarios de una línea aérea durante 50 días					
x	f	fx	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
54.5	3				
64.5	7				
74.5	18				
84.5	12				
94.5	8				
104.5	2				
	$n=$	$\sum fx=$			$\sum f(x-\bar{x})^2=$
$\bar{x}=\dfrac{\sum fx}{n}=$			$s=\sqrt{\dfrac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}}=$ $s^2\approx$		

Comprueba los resultados que obtuviste en esta actividad utilizando la calculadora estadística, la cual encontrarás en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2GW2bTu

Competencias a desarrollar

- **CG** 4.1
- **CG** 5.2
- **CDBM** 8

Actividad de aprendizaje 2

Obtén las medidas de tendencia central y de dispersión de la situación problémica que se presenta a continuación. Analiza tus resultados, contrástalos con la realidad y construye tus propias conclusiones. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

Investiga el promedio, en matemáticas, de 15 compañeros de tu grupo y 15 estudiantes de otro grupo. Con los datos que obtengas elabora una distribución de frecuencias para calcular: la media, la moda, la mediana y la desviación estándar de cada grupo de estudiantes.

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2qu02Dq

Comprueba los resultados que obtuviste en esta actividad utilizando la calculadora estadística, la cual encontrarás en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2GW2bTu

Gráficos

Representación esquemática de la relación que hay entre variables de una población o muestra.

De pastel

Para realizar este tipo de gráfico (**Figura 4.1**), también conocido como **gráfico circular**, es necesario dividir el círculo en sectores circulares de modo que cada sector sea proporcional a las distintas frecuencias absolutas.

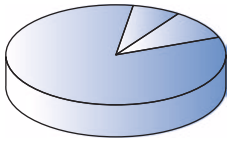


Figura 4.1 Gráfico de pastel.

De barras

En el gráfico de barras (**Figura 4.2**) las distintas categorías se deben colocar a igual distancia en el eje de las abscisas y a partir de ellas se trazan barras, sobre el eje de las ordenadas, cuya altura corresponda a la frecuencia observada.

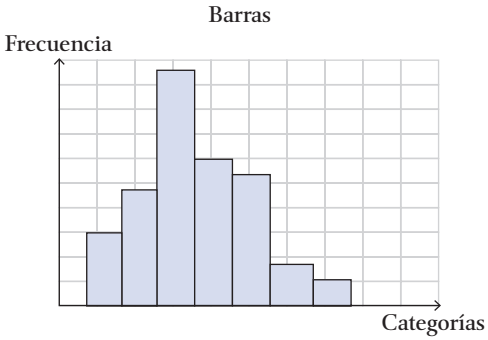


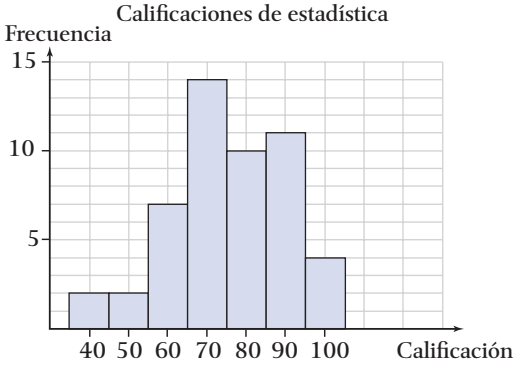
Figura 4.2 Gráfico de barras.

Histograma

Un histograma es una gráfica de barras que representa una distribución de frecuencias de una variable cuantitativa. Se integra de la siguiente manera:

1. Un título que identifica la población o la muestra de interés.
2. Un eje vertical que representa las frecuencias de cada clase.
3. Un eje horizontal que representa las marcas de clase. El ancho de las barras es el tamaño del intervalo de clase y su punto medio va sobre las marcas de clase.

La distribución de frecuencias de las calificaciones de 50 estudiantes de la tabla 4.1 se presenta en forma de histograma de la manera siguiente:



Polígono de frecuencias

Un polígono de frecuencias (**Figura 4.3**) es un gráfico de línea que se traza sobre los techos de las barras del histograma.

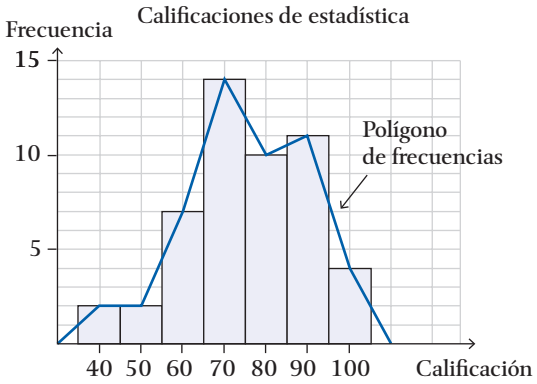


Figura 4.3 Polígono de frecuencias.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

Los datos de la tabla siguiente corresponden a los ingresos de 40 ejecutivos de empresas en México. Los datos están expresados en miles de dólares.

58	64	79	74	69	71	65	55	73	40
76	76	74	38	62	54	79	75	72	50
45	65	71	79	38	69	46	57	69	61
67	45	85	61	69	62	77	77	51	69

Construye, a partir de ellos, una tabla de frecuencias.

Solución

Primero, determinamos el número de clases con $2^c \geq 40$, entonces, c puede ser 6 porque $2^6 \geq 40$. Ahora, calculamos el rango, es decir:

$$\text{Rango} = 85 - 38 = 47$$

Determinamos el tamaño del intervalo de clase, así:

$$IC = \frac{85-38}{6} \approx 7.8 \quad (8 \text{ es una buena sugerencia})$$

A continuación elegimos los límites de la clase; por ejemplo, el valor inicial puede ser 36 y la primera clase es:

$$36 \leq x < 44$$

Finalmente, para una mejor comprensión, realizamos el conteo dato por dato, de este modo, llenamos las celdas de la tabla de frecuencias.

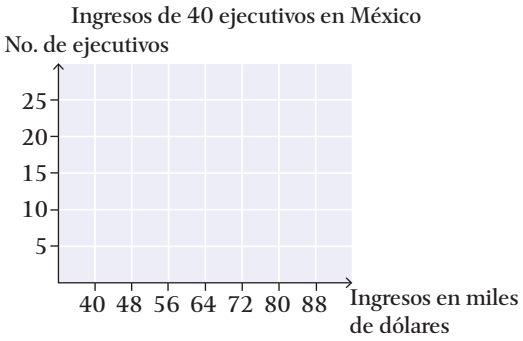
Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase x
1	$36 \leq x < 44$	|||	3	40

2	$44 \leq x < 52$	𝍸	5	48
3	$52 \leq x < 60$	𝍸	4	56
4	$60 \leq x < 68$	𝍸 |||	8	64
5	$68 \leq x < 76$	𝍸 𝍸 ||	12	72
6	$76 \leq x < 84$	𝍸 ||	7	80
	84 o más	|	1	88
			40	

En acción

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

Elabora un histograma y un polígono de frecuencias con los datos del ejemplo anterior.



Actividad de aprendizaje 3

Competencias a desarrollar

- CG 4.1
- CG 5.2
- CG 5.6
- CDBM 8

Analiza las situaciones que se presentan a continuación, aplica tus aprendizajes sobre histogramas y polígonos de frecuencias y resuelve según corresponda.

1. Las velocidades de 50 automóviles fueron medidas por un radar en una calle de cierta ciudad. En la tabla siguiente se presentan las velocidades medidas. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

Velocidades									
27	23	22	38	43	24	35	26	28	18
25	23	22	52	31	30	41	45	29	27
29	28	27	25	29	28	24	37	28	29
26	33	25	27	25	34	32	36	22	32
21	23	24	18	48	23	16	38	26	21

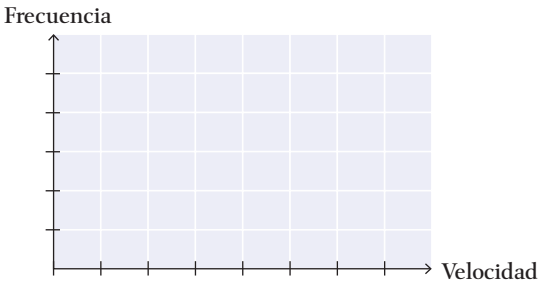
a) Elabora una tabla de frecuencias agrupadas, usa los límites de clase $12 \leq x < 18,\ 18 \leq x < 24$, etcétera.

(Continúa)

(Continuación)

b) Elabora un histograma y un polígono de frecuencias.

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase x



2. A 50 alumnos de segundo semestre se les aplicó una prueba de condición física. En la tabla siguiente se presentan los datos que se obtuvieron.

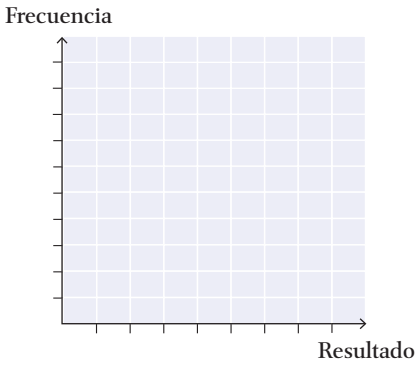
Resultados de la prueba de educación física									
12	22	6	9	2	9	5	9	3	5
18	6	12	21	23	9	10	24	21	17
17	5	14	16	19	18	3	4	21	19
14	17	4	5	22	12	15	18	20	8
6	9	2	17	15	9	4	15	14	19

a) Elabora una tabla de frecuencias agrupadas, usa los límites de clase $1 \leq x < 4$, $4 \leq x < 7$, etcétera.

b) Elabora un histograma y un polígono de frecuencias.

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase x

Prueba de condición física



Para realizar esta actividad puedes apoyarte en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2HlKFre

Actividad de aprendizaje 4

Competencias a desarrollar

- **CG** 4.1
- **CG** 5.2
- **CG** 5.6
- **CDBM** 8

Elaboren, en equipos de cinco integrantes, un proyecto de investigación donde determinen las medidas de tendencia central, así como las medidas de dispersión y la representación gráfica de alguna situación que se relacione con su escuela o entorno. Por ejemplo, la deserción escolar por semestre, los emigrantes de tu comunidad, la tala de árboles, las principales actividades económicas de tu comunidad, entre otros. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

Al finalizar la actividad, tomen un momento para reflexionar y socializar al interior del equipo, sobre cómo se sintieron al explicar o al dejar que otros de sus compañeros les explicara.

Comprueba los resultados que obtuviste en esta actividad utilizando la calculadora estadística, la cual encontrarás en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2GW2bTu

WEB

Consolida lo aprendido hasta el momento realizando lo siguiente: **1.** Revisa y analiza los ejemplos de los recursos *Introducción a la estadística: media, mediana y moda* (https://bit.ly/2JxnAAj) y *Medidas de dispersión: rango, varianza y desviación estándar* (https://bit.ly/2JJZ7Yk); **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos elijan uno de los temas estudiados en el bloque, repásenlo y redacten un resumen; **3.** Con las notas de su resumen, creen un video y una serie de 5 ejercicios interactivos (usen *GeoGebra* [http://bit.ly/2HDgJ7S] y *ProProfs* [http://bit.ly/2Jpy0C0] o *QuizWorks* [https://bit.ly/2ErnXbC]); **4.** Presenten su video ante el grupo y compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

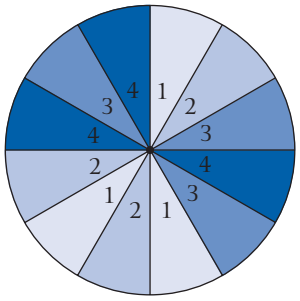
Probabilidad

¿Qué significa que la ocurrencia de un evento sea probable? ¿De qué forma crees que se relacionan la probabilidad y el análisis de riesgos? ¿En qué situaciones de tu vida cotidiana aplicas la probabilidad?

En acción

Analiza detenidamente cada una de las situaciones que se presentan a continuación, acciona tus saberes y responde según corresponda.

1. La rueda con distintas tonalidades que se muestra a continuación sirve para el lanzamiento de dardos. Los jugadores ganan el premio mayor si el dardo cae en el centro. Cuando el dardo queda en alguna región determinada, hay diferentes premios. Considerando esto, reflexiona sobre las preguntas siguientes:



a) ¿Qué **probabilidad** hay de que el dardo quede en las secciones marcadas con 1?

b) ¿Cuál es la probabilidad de pegar en las secciones marcadas con 3 o 4?

2. La gráfica siguiente representa la distribución de frecuencias de las calificaciones de 50 estudiantes en la asignatura de estadística. Si se elige un estudiante al azar:

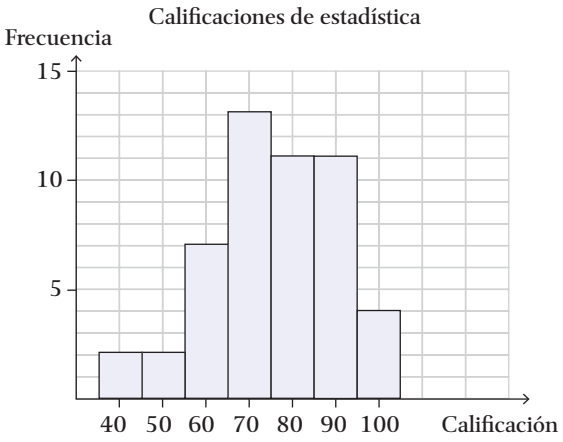
a) ¿Cuál es la probabilidad de que su calificación sea 80?

b) ¿Qué probabilidad hay de que su calificación sea de 80 o más?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya reprobado?

GLOSARIO

Probabilidad. Concepto que se utiliza, comúnmente, para señalar la posibilidad de que un evento suceda.



3. En una caja hay tres billetes de $50, cuatro billetes de $100, cinco billetes de $200 y dos billetes de $500. Si tomamos un billete sin ver su denominación:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el billete sea de $500?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de $200 o de $500?

Para realizar esta actividad pueden apoyarse en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/2Hy18Gn

En muchas ocasiones habrás escuchado frases como: "Probablemente llueva", "Hay probabilidad de que el año entrante mejore la economía del país", "Es probable que estudie una especialidad en el extranjero", "Tiene alta probabilidad de ganar la carrera", etcétera.

Las situaciones relacionadas con el azar han preocupado mucho a la humanidad desde hace siglos. Por ejemplo, en el siglo XVII ocupó la atención de grandes filósofos y matemáticos como Pascal, Fermat y Bernoulli, entre otros, quienes trataron estas situaciones de manera científica.

Conceptos básicos de probabilidad

Eventos deterministas y aleatorios

Como recordarás de tus clases de química, la síntesis de la molécula de agua consiste en combinar dos átomos de hidrógeno con uno de oxígeno. La experiencia nos enseña que por más veces que repitamos el **experimento**, el resultado siempre será idéntico.

GLOSARIO

Experimento. Acción de manipular las variables relacionadas con un fenómeno, con la intención de validar o refutar una hipótesis.

No ocurre lo mismo, por ejemplo, con el clima o el nacimiento de los niños, eventos caracterizados por la diversidad.

Si reflexionamos en las situaciones antes mencionadas, existen dos maneras diferentes de que ocurran los hechos: una que siempre es predecible y otra donde el resultado es variable.

Experimentos determinísticos. Son situaciones o experimentos donde el resultado, en igualdad de condiciones, siempre es el mismo.

Experimentos aleatorios. Son experimentos en los que el resultado puede ser variable, es decir, no siempre ocurre de la misma manera.

Variables aleatorias

Variable aleatoria. Es una variable tal que en el espacio muestral de probabilidad sólo puede adquirir un valor numérico único. Por ejemplo, la variable x es el número de artículos defectuosos en un lote de producción, o la velocidad límite permitida en una autopista.

Existen dos tipos de variables aleatorias: las variables aleatorias discretas y las variables aleatorias continuas.

Variable aleatoria discreta. Variable que en un experimento de probabilidad sólo admite valores numéricos puntuales, es decir, no oscila en un intervalo de valores. Por ejemplo, la variable x es el número de hijos que un matrimonio puede tener, o los goles que un equipo puede anotar, etcétera, $(0, 1, 2, \ldots)$.

Variable aleatoria continua. Variable que en un evento de probabilidad o en un intervalo puede asumir un número infinito de valores. Por ejemplo, el 80% o más de la población utilizan Internet.

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2qvgpk2

En acción

Reflexiona si los eventos siguientes son aleatorios o determinísticos.

a) Extraer una carta de una baraja.

b) Encender una lámpara.

c) Hacer una llamada telefónica a un determinado número.

Para realizar esta actividad pueden apoyarse en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/1kwmxMz

Espacio muestral

La presentación e interpretación de datos aleatorios es el interés principal del estudio de la probabilidad y estadística. Por ejemplo, en una línea de producción nos interesaría la *clasificación de artículos defectuosos y no defectuosos*, con la finalidad de mejorar el proceso. En una contienda política, sería de gran relevancia conocer la *probabilidad de ganar que tienen los candidatos participantes*, etc. La descripción de estos procesos que generan un conjunto de datos aleatorios se llama *experimento.*

En acción

Con el propósito de definir *espacio muestral*, contesta las preguntas siguientes:

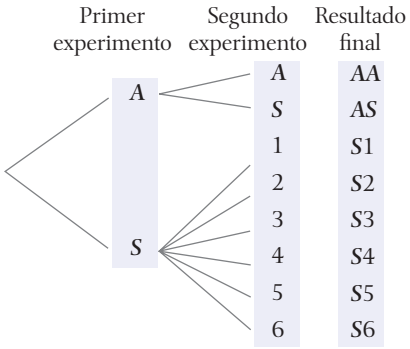
1. ¿Cuáles son los posibles resultados que podrían ocurrir al lanzar una moneda normal al aire?

2. Si lanzamos un dado, ¿cuántos posibles resultados tendríamos en la cara superior de éste?

Para realizar esta actividad pueden apoyarse en el recurso digital que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/2ENNImY

Considera el experimento de lanzar una moneda al aire una vez. Si cae águila, se lanza la moneda una segunda ocasión. Si en el primer lanzamiento se obtiene sol, entonces, se arroja un dado una vez. ¿Cuáles y cuántos son los posibles resultados del experimento?

En casos como éste es de gran utilidad utilizar un *diagrama de árbol* como el siguiente y anotar en cada rama los posibles resultados. Designemos al posible resultado de águila como A y al posible resultado de sol como S.



Todos los posibles resultados son ocho, es decir:

$$\{AA, AS, S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$$

Espacio muestral. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento estadístico se llama *espacio muestral* y se representa con la letra *S*.

A cada elemento del espacio muestral se le denomina *punto muestral*. Cuando es posible listar todos los elementos del espacio muestral se acostumbra encerrarlos entre llaves, separados por una coma. De acuerdo con ésto, reiteramos la representación del resultado del experimento anterior.

$$S = \{AA, AS, S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$$

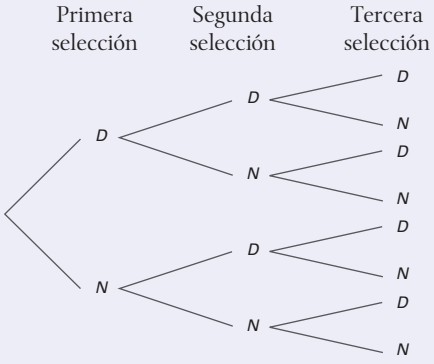
Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

Selecciona, en forma aleatoria, tres artículos de un proceso de manufactura, construye un diagrama que muestre el espacio muestral de este experimento; después, lista todos sus elementos.

Solución

Al examinarlos es evidente que cada uno de ellos podría resultar defectuoso (*D*) o no defectuoso (*N*). Los resultados se ilustran en el diagrama siguiente:



Es decir, el espacio muestral es:

$$S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$$

Cuando es muy difícil o imposible listar todos los puntos muestrales de un espacio muestral es conveniente utilizar *un enunciado* o *una regla* que defina correctamente el conjunto de elementos de éste

en función de sus cualidades o características. Por ejemplo, menciona todas las empresas productivas de México:

$$S = \{x \mid x \text{ es una empresa productiva de México}\}$$

Ésto se lee: "S es el conjunto de todas las x tal que x es una empresa productiva de México". La línea | se lee "tal que". De igual manera, si S es el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$, podemos escribir así:

$$S = \{x \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$$

De cualquier forma, la regla mediante la cual describiremos el espacio muestral dependerá de la naturaleza de la situación que estemos analizando.

Competencias a desarrollar

- **CG 4.1**
- **CG 4.5**
- **CG 5.2**
- **CDBM 7**
- **CDBM 8**

Actividad de aprendizaje 5

Analicen, en equipos de cinco integrantes, cada una de las situaciones que se presentan a continuación, apliquen sus aprendizajes y resuelvan según corresponda para cada caso. Finalmente, realicen un video tipo tutorial en YouTube donde expliquen el procedimiento de resolución que utilizaron así como los resultados obtenidos. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. Escribe los elementos de cada uno de los espacios muestrales siguientes.

a) Los enteros pares que hay entre 10 y 50.

$$S = \{ \qquad \}$$

b) El conjunto solución de $S = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$.

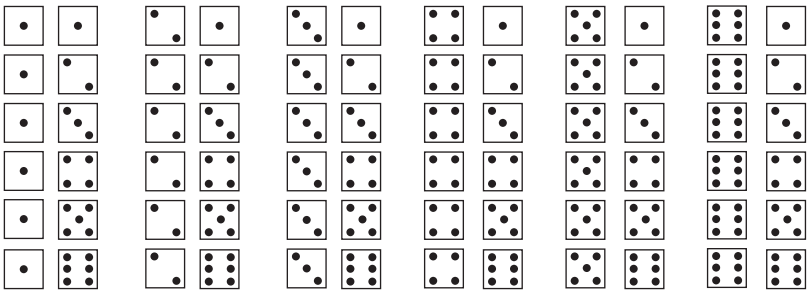
$$S = \{ \qquad \}$$

c) Los resultados cuando se lanza una moneda al aire hasta que resulte un sol o tres águilas. *Sugerencia*: elabora en tu cuaderno un diagrama de árbol.

$$S = \{ \qquad \}$$

2. Completa las llaves siguientes, indica los puntos muestrales que resultan al lanzar dos dados.

$$S = \left\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \right\}$$



3. Un experimento consiste en lanzar primero un dado y después una moneda, siempre y cuando el número en el dado sea par. Si el resultado es impar, la moneda se lanza dos veces. Dibuja un diagrama de árbol que muestre los 18 elementos del espacio muestral.

Al finalizar la actividad, tomen un momento para reflexionar socializar al interior del equipo, sobre cómo se sintieron al explicar o al dejar que otro de sus compañeros les explicara.

Para subir su video a YouTube pueden consultar el tutorial que se comparte en el siguiente vínculo:
https://bit.ly/1ESb6wS

Eventos

Con frecuencia, en los experimentos estadísticos es de un interés especial la ocurrencia de ciertos *eventos*. Por ejemplo, ¿cuál sería el evento A de que en la selección de tres artículos de un proceso de manufactura, sólo uno de ellos sea defectuoso?

$$A = \{ \qquad \}$$

Evidentemente, la respuesta está en el espacio muestral $S = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$. Con base en ésto, podemos definir el concepto de evento como:

Un *evento* es un subconjunto de un espacio muestral.

Evento nulo. El *evento nulo* es un subconjunto del espacio muestral y no contiene elemento alguno. Se representa por el símbolo ϕ.

Un ejemplo de ésto es el evento solución de la ecuación $x^2 + 9 = 0$ en el campo de los números reales. Si lo intentamos, veremos que la solución es compleja.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

1. Definamos a t como el tiempo de vida útil, en años, de un determinado equipo de trabajo. El espacio muestral es $S = \{t \mid t \geq 0\}$. El evento A de que el equipo se dañe antes del final del cuarto año será:

$$A = \{t \mid 0 \leq t \leq 4\}$$

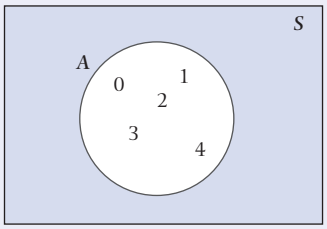
2. Cuando se lanzan dos dados, el evento B en que ocurra que la suma de ambos números sea mayor o igual a 10 es:

$$B = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

(Continúa)

(*Continuación*)

Es común que los eventos se representen gráficamente con los llamados *diagramas de Venn*, los cuales consisten en dibujar cualquier figura cerrada como rectángulos, círculos, etcétera, y dentro de ellos incluir los puntos muestrales o describir las características de éstos. Por ejemplo, si representamos la situación del ejemplo anterior con uno de estos diagramas, queda de la siguiente manera:

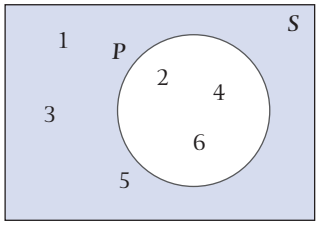


Complementos, intersecciones y uniones de los eventos

Considera el experimento de lanzar un dado normal. El espacio muestral se podría clasificar de la siguiente manera: que el número que aparezca sea *par* o *impar*. Obviamente, los dos eventos son subconjuntos de S y se dice que un evento es *complemento* del otro.

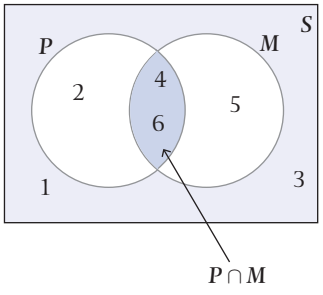
Complemento. Un evento A' es complemento del evento A si todos sus elementos están en el espacio muestral, pero no están en A.

En el experimento de lanzar un dado, llamemos P al evento de que el número salga par. Así, P' será el evento de que el número no sea par. En otras palabras, $P' = \{1, 3, 5\}$ como se muestra en el diagrama de Venn siguiente.



En el lanzamiento de un dado, llamamos P al evento de que ocurra un par. Ahora llamemos M al evento de que el número sea mayor de 3, es decir:

$P = \{2, 4, 6\}$ y $M = \{4, 5, 6\}$, luego, el evento $\{4, 6\}$ es cuando un número es par y mayor de 3. Se dice entonces que es la *intersección de P* y M como se ilustra en el diagrama de Venn siguiente.

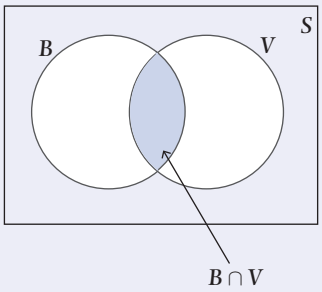


Intersección. La *intersección* de dos eventos A y B, que se representa por el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene a todos los elementos comunes entre A y B.

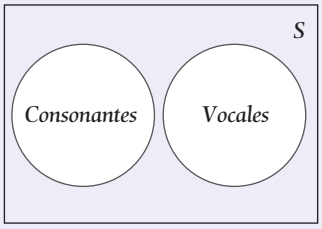
Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

1. Sea B el evento de que un estudiante que se selecciona al azar sea del Colegio de Bachilleres, y V el evento de que el estudiante seleccionado tenga credencial para votar. De esta forma, el evento $B \cap V$ está integrado por los estudiantes del Colegio de Bachilleres que pueden votar. Si representamos esto con un diagrama de Venn, tenemos:

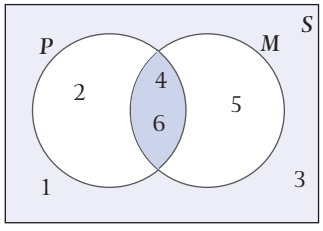


2. Sea $C = \{x \mid x \text{ es una letra consonante}\}$ y $V = \{a, e, i, o, u\}$. Es evidente que $C \cap V = \phi$; es decir, C y V no tienen letras en común.
   Cuando dos eventos no tienen elementos en común se dice que son *mutuamente excluyentes* o que son *disjuntos*. Así, si lo representamos mediante un diagrama de Venn, tenemos:



Eventos disjuntos. Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \phi$, ésto es, si A y B no tienen elementos en común.

Al lanzar un dado, si $P = \{2, 4, 6\}$ y $M = \{4, 5, 6\}$, se podría desear que ocurriera P o M, o ambos. Tal evento se denomina *unión* y sucederá si el resultado es un elemento del evento $\{2, 4, 5, 6\}$ y se representa por el diagrama de Venn siguiente.



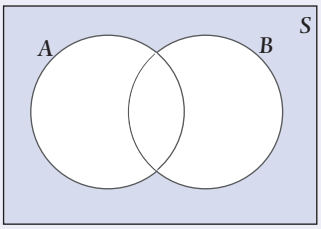
$P \cup M$

Unión. La unión de dos eventos A y B, que se representa por el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B, o a *ambos*.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

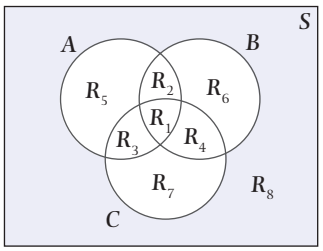
Sea A el evento de que un estudiante de bachillerato seleccionado al azar practique futbol. Sea B el evento de que el estudiante seleccionado practique basquetbol. Entonces, $A \cup B$ es el evento de todos los estudiantes que practican futbol o basquetbol, o ambos. Así, al representar esta situación mediante un diagrama de Venn, tenemos:



$A \cup B$

Regiones en los eventos

Cuando se tiene un gran número de datos y queremos representar su relación con diagramas de Venn, es conveniente manejar regiones mutuamente excluyentes, como se observa en el diagrama siguiente.



Las regiones en blanco son eventos mutuamente excluyentes y representan la unión de A, B y C. Es decir:

$$A \cup B \cup C = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6 \cup R_7$$

De la misma manera, en las regiones de la figura anterior podemos ver que:

$$A \cap B \cap C = R_1$$
$$B \cap C = R_1 \cup R_4$$
$B \cap C$ y sólo $B \cap C = R_4$

En acción

Analiza cada una de las situaciones que se presentan a continuación, pon en acción tus saberes y resuelve según corresponda. Construye un reporte escrito en el cual argumentes tus respuestas y los diagramas de Venn que se solicitan en la actividad.

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2GYhJ9g

1. Considerando el experimento de lanzar dos dados, lista los elementos que corresponden al evento:

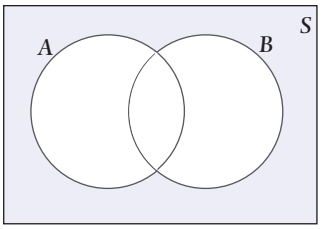
a) $A =$ que la suma sea mayor de 10. $A = \{\quad\}$

b) $B =$ que salga un 5 en cualquier dado. $B = \{\quad\}$

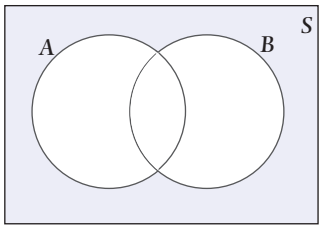
c) $A \cup B = \{\quad\}$

d) $A \cap B = \{\quad\}$

2. En los diagramas de Venn siguientes ilustra la intersección y la unión de *A* y *B* escribiendo los elementos de la situación anterior.



Unión



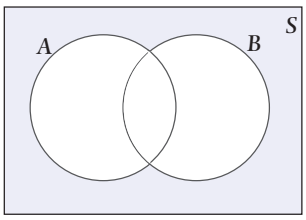
Intersección

3. Un experimento consiste en lanzar tres monedas diferentes y normales. Lista los elementos que corresponden al evento *E* de que al menos salgan dos águilas.

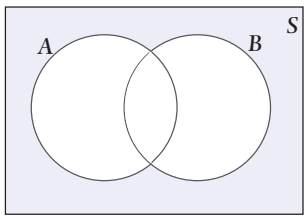
4. Dibuja un diagrama de Venn que muestre las intersecciones y uniones posibles de los eventos siguientes referentes al espacio muestral *S*, el cual consta de todos los estudiantes de la UACH. Interpreta cada una de las regiones independientes que se forman.

P: un estudiante cursa el penúltimo grado.
M: un estudiante se especializa en matemáticas.
F: un estudiante es una mujer.

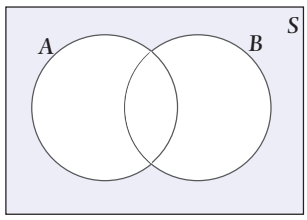
5. Sean A y B eventos referentes al espacio muestral *S*. Utiliza los diagramas de Venn para sombrear las áreas que sean representativas de:



$(A \cap B)'$



$(A \cup B)'$



$(A' \cup B')$

Para elaborar tu diagrama de Venn puedes hacer uso de la herramienta *Microsoft Word*. Encontrarás un tutorial con la información necesaria en siguiente vínculo: https://bit.ly/2ITe09v

Definición de probabilidad

Se tiene registro de que fue en el siglo XVI cuando se inició el interés de las matemáticas por la probabilidad. Tal vez la inclinación por las apuestas fue lo que condujo al hombre a desarrollar la teoría de la probabilidad. En su afán por ganar, apeló a los matemáticos y científicos para que encontraran estrategias y técnicas óptimas para aplicar a los juegos de azar (**Figura 4.4**).

Figura 4.4 Entre los juegos de azar, el póquer es uno de los más populares.

En la actualidad, el empleo de la probabilidad es determinante en la toma de decisiones. Es importante aclarar desde ahora que, en muchos casos, es prácticamente imposible predecir *qué pasará*, aunque sí es posible establecer *lo que podría pasar*.

Son numerosos los ejemplos que podemos mencionar en donde la probabilidad tiene un papel fundamental, algunos son: predecir cuánta demanda tendrá un nuevo producto, estimar el costo de producción, pronosticar el clima, prevenir fallas en equipos de trabajo, comprar acciones, contratar a un nuevo empleado, predecir la reacción de los gobiernos cuando hay cambios de políticas, calcular el impacto de la inflación y, en general, en todos los campos donde está presente el azar.

En acción

Vamos a entrar en el tema de lleno respondiendo de manera natural o empírica las preguntas siguientes:

1. Cuando lanzamos 2 veces una moneda normal al aire, sabemos que los eventos posibles son:

$$\{AA, AS, SA, SS\}$$

¿Cuál es la probabilidad de que caiga al menos un sol?

2. Si lanzamos un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga...

a) un número par?

b) un número mayor de 4?

3. En una caja hay 6 caramelos: 2 de fresa, 3 de naranja y 1 de limón. Si una persona con los ojos vendados saca uno de ellos, ¿qué oportunidad tiene de obtener uno de fresa o de naranja?

Debemos mencionar que el éxito que tenga un estudioso de la estadística para establecer la posibilidad de lo que podría pasar depende, en gran medida, de la historia y la estructura de la información de que disponga acerca de un experimento. Esta premisa nos indicará el grado de confianza o el nivel de capacidad para cuantificar qué tan probable es determinado evento. Enseguida veremos algunos ejemplos de probabilidad que nos ayudarán a encontrar definiciones que formalicen nuestro estudio.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

1. Cuando lanzamos una moneda 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 2 águilas?

Solución

Sabemos que el espacio muestral tiene 8 elementos, éstos son:

$$\{AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS\}$$

El evento donde aparecen al menos 2 águilas consta de 4 elementos, es decir:

$$\{AAA, AAS, ASA, SAA\}$$

Luego, la probabilidad p de obtener al menos 2 águilas es (verbalmente se expresa como 4 de 8):

$$p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

2. De los 500 empleados de una empresa, 170 están clasificados como miembros del personal administrativo (A), 290 como trabajadores de línea (L), y los 40 restantes son auxiliares (R). Si se selecciona un empleado al azar, entonces:

$$p(A) = \frac{170}{500} = 0.34 = 34\%$$

$$p(L) = \frac{290}{500} = 0.58 = 58\%$$

$$p(R) = \frac{40}{500} = 0.08 = 8\%$$

Observa que la probabilidad de que el empleado seleccionado sea A o B o R es equivalente a la probabilidad de la unión de los tres eventos, es decir:

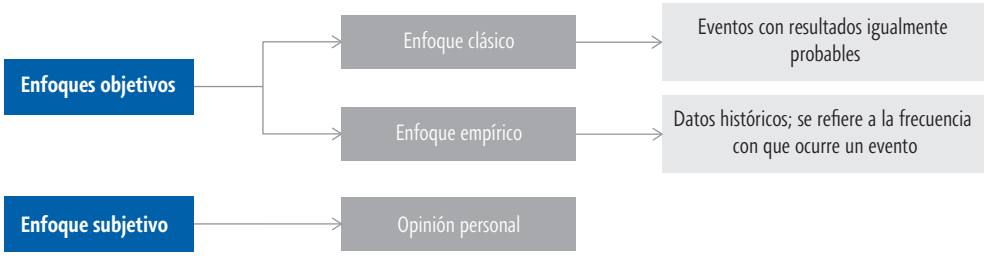
$$p(A \text{ o } B \text{ o } R) = 0.34 + 0.58 + 0.08 = 1 = 100\%$$

Con base en lo anterior, podemos decir que la *probabilidad* de un evento A es el cociente del número n de resultados favorables del *experimento* entre el número total N de resultados posibles (espacio muestral). Ésto es:

$$p(A) = \frac{n}{N}$$

Enfoques de la probabilidad

Antes de profundizar en la aplicación de la probabilidad, es conveniente conocer las diferentes fuentes o enfoques que existen en cuanto a la estimación o el cálculo de las probabilidades. Lo anterior se ilustra con el diagrama siguiente.



En acción

Analiza las situaciones que se presentan a continuación, pon en acción tus saberes y resuelve según corresponda.

1. Se numeran 10 fichas del 0 al 9, y se colocan en una urna. Si luego de mezclarlas una vez se saca una ficha, determina la probabilidad de que ésta sea:

a) el número 3. $p(3) =$

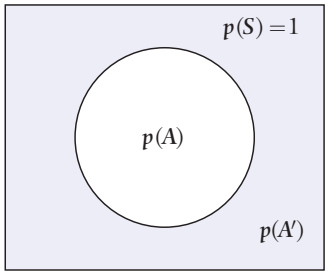
b) un número menor que 5. $p(\text{menor de } 5) =$

2. El neumático de un automóvil tiene incrustado un vidrio o un clavo. Tomemos en cuenta que el 20% del neumático es visible. Si el automovilista se detiene, ¿cuál es la probabilidad de que el vidrio o el clavo queden en la parte visible?

3. Una caja contiene 500 sobres, 75 de ellos contienen, cada uno, $100 en efectivo, 150 contienen $25 y 275 contienen $10. Cada sobre puede comprarse al precio de $50. ¿Cuál es el espacio muestral para las diferentes cantidades de dinero? Encuentra la probabilidad de que el primer sobre que se compra contenga menos de $100.

Para comprobar tu respuesta inicial puedes hacer uso del formulario de probabilidad que encontrarás en el siguiente vínculo: https://bit.ly/2qytW9J y de la calculadora de probabilidad, la cual puedes consultar en este enlace: https://bit.ly/2H1bPEk

Hasta ahora hemos aprendido que el menor valor de probabilidad que puede tener un evento es 0 (*probabilidad del evento imposible*) y que el mayor valor que puede adoptar es 1 o 100%, en el caso del evento que seguramente ocurrirá. Por lo tanto, podemos afirmar que:



1. La probabilidad de cualquier evento A está determinada por valores que pueden variar de 0 a 1. Es decir:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

2. La probabilidad del espacio muestral S es 100% cuando:

$$p(S) = 1$$

3. En un experimento dado, el evento A debe ocurrir o no. Por ello, la suma de probabilidades de ocurrencia o no del evento debe ser 1. Es decir:

$$\underbrace{p(A)}_{\substack{\text{Prob. de que ocurra}}} + \underbrace{p(A')}_{\substack{\text{Prob. de que no ocurra}}} = 1$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

1. Un dado está cargado de tal forma que la probabilidad de que salga un número par es el doble de la probabilidad de obtener un número impar. ¿Cuál es la probabilidad de cada número?

Solución

$p(1) = p(3) = p(5) = x$

$p(2) = p(4) = p(6) = 2x$

$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

$$3x + 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$p(1) = p(3) = p(5) = \frac{1}{9}$$

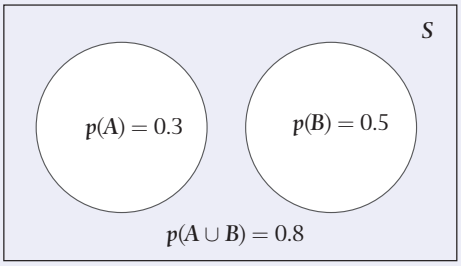
$$p(2) = p(4) = p(6) = \frac{2}{9}$$

2. A y B son eventos mutuamente excluyentes y $p(A) = 0.3$ y $p(B) = 0.5$. Utiliza diagramas de Venn y determina: a) $p(A \cup B)$, b) $p(A')$, c) $p(A' \cap B)$.

(Continúa)

(Continuación)

Solución



a) $p(A \cup B) = 0.3 + 0.5 = 0.8$
b) $p(A') = 1 - p(A) = 0.7$
c) $p(A' \cap B) = 0.5$

Competencias a desarrollar

- CG 4.1
- CG 5.2
- CDBM 7
- CDBM 8

En acción

Analiza las situaciones que se presentan a continuación, pon en acción tus saberes y responde según corresponda.

1. Al tirar tres veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga sol las tres veces? ¿Qué probabilidad hay de que ésto no suceda? El espacio muestral es:

$$S = \{AAA, AAS, ASS, ASA, SAA, SSA, SAS, SSS\}$$

2. Si en un lote de faros para automóvil, un 10% presenta defectos de fabricación, ¿qué probabilidad hay de que un inspector no encuentre ningún defecto si inspecciona el lote?

Leyes de probabilidad

Cuando conocemos la probabilidad de algún evento, es más fácil calcular la probabilidad de otros *eventos compuestos* a partir de este conocimiento. Un **evento compuesto** es cualquier evento que combina dos o más eventos simples. A continuación presentamos algunas reglas que con frecuencia simplifican tales cálculos.

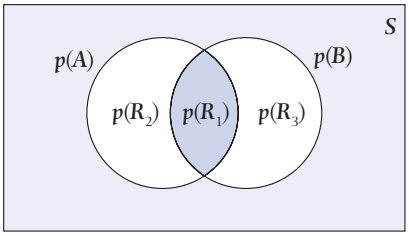
Ley aditiva

Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Demostración

En el diagrama de Venn que se muestra a la derecha, $p(A) = p(R_1) + p(R_2)$ y $p(B) = p(R_1) + p(R_3)$. Luego, la unión de A con B sería $p(A) + p(B)$, pero estaríamos sumando dos veces $p(R_1) = p(A \cap B)$, de manera que tenemos que restarla una vez.



Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

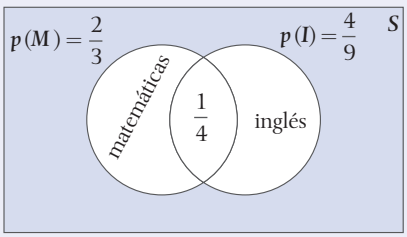
1. La probabilidad de que un alumno apruebe matemáticas es de $\frac{2}{3}$ y la de que apruebe inglés es de $\frac{4}{9}$. Si la probabilidad de que apruebe ambos cursos es de $\frac{1}{4}$, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe al menos uno de ellos?

Solución

Decir "al menos un curso" significa aprobar matemáticas o inglés o ambos, es decir, la unión de los dos eventos:

$$p(M \cup I) = p(M) + p(I) - p(M \cap I)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

El diagrama de Venn siguiente ilustra las probabilidades que tiene el alumno de aprobar los cursos.



(Continúa)

(Continuación)

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe únicamente matemáticas?

$$p(\text{sólo } M) = p(M) - p(M \cap I) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces, $p(A \cap B) = p(\phi) = 0$ y la regla anterior se reduce a:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

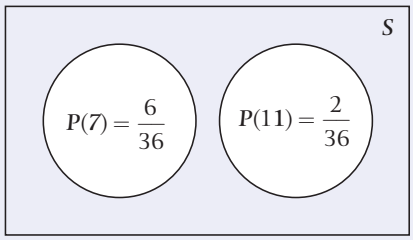
2. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 u 11?

Solución

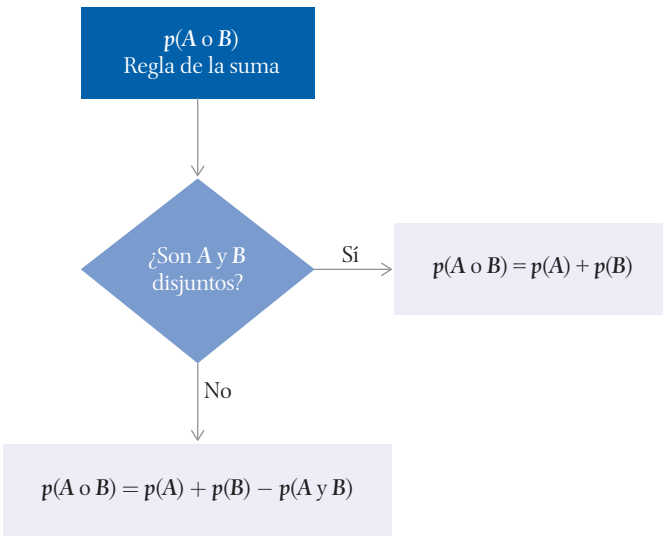
La probabilidad de que ocurra un 7 sucede en 6 de los 36 casos posibles. La probabilidad de que la suma sea un 11 ocurre en 2 de los 36 eventos. Como no pueden ocurrir ambos eventos al mismo tiempo, entonces, la probabilidad de la unión es:

$$p(7 \cup 11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Al realizar el diagrama de Venn, tenemos que:



Con el diagrama siguiente esperamos que se consolide mejor la comprensión de la ley aditiva de la probabilidad.



En acción

Analiza cada una de las situaciones que se presentan a continuación, pon en acción tus saberes y resuelve según corresponda.

1. En una escuela preparatoria se gradúan 100 estudiantes: 54 estudiaron matemáticas, 69 historia y 35 ambas materias. Si se selecciona aleatoriamente a uno de estos estudiantes, determina la probabilidad de que a) haya cursado matemáticas o historia, b) no haya cursado ninguna de estas materias, c) haya estudiado historia pero no matemáticas.

2. Un agente de ventas estima que las posibilidades de que un producto nuevo tenga éxito son de 2 a 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto se venda exitosamente?
Nota: la posibilidad a favor de un evento **A** es el cociente del número de veces que ocurre **A** entre el número de veces que no ocurre; también se llama ventaja. Esto se expresa como:

$$\text{Posibilidad de } A = \frac{p(A)}{1-p(A)} = \frac{2}{1}$$

Sugerencia: despeja $p(A)$.

Ley multiplicativa

El objetivo de este apartado es comprender una regla que nos ayude a calcular $p(A \text{ y } B)$, esto es, la probabilidad de que el evento A ocurra en un primer ensayo y el evento B ocurra en un segundo ensayo.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver problemas similares.

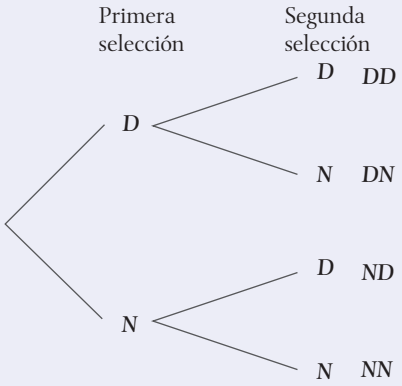
Se seleccionan en forma aleatoria dos artículos de un proceso de manufactura, uno tras otro. Construye un diagrama que muestre el espacio muestral de este experimento y calcula la probabilidad de que los dos artículos sean defectuosos.

(Continúa)

(Continuación)

Solución

Al examinar el caso, es evidente que cada uno de los artículos puede resultar defectuoso (D) o no defectuoso (N) en el primer evento y también en el segundo. De manera que los resultados se pueden ilustrar en el diagrama siguiente:



La probabilidad de que los dos artículos sean defectuosos es:

$$p(D \text{ y } D) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Primer evento}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Segundo evento}} = \frac{1}{4}$$

Competencias a desarrollar

- **CG 4.1**
- **CG 5.2**
- **CG 5.6**
- **CDBM 7**
- **CDBM 8**

Actividad de aprendizaje 6

Analiza las situaciones que se presentan a continuación, aplica tus aprendizajes sobre ley aditiva o multiplicativa y resuelve según corresponda. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. La probabilidad de que una industria se ubique en Chihuahua es de 0.7; de que se localice en Sonora es de 0.4, y de que se encuentre ya sea en Chihuahua o en Sonora o en ambos estados es de 0.8. ¿Cuál es la probabilidad de que la industria:

a) se localice en ambos estados?

b) no se localice en ninguno de ellos?

2. La gráfica que se muestra a continuación representa la distribución teórica de las frecuencias relativas de hombres y mujeres que hay en familias de cuatro hijos. Con base en este histograma, calcula la probabilidad de que una familia con cuatro hijos:

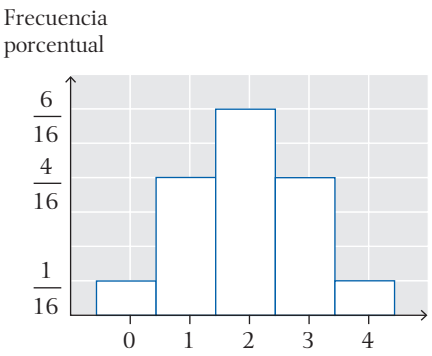
a) no tenga hijos varones.

b) tenga dos hijos varones.

c) todos los hijos sean varones.

d) tenga dos o más hijos varones.

e) Calcula el área del histograma.



3. En una urna hay 2 bolas rojas, 2 amarillas, 1 verde y 1 azul. Se saca una bola y enseguida se regresa a la urna, luego se vuelve a extraer otra. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de color verde.

4. Usando los mismos elementos del ejercicio anterior, calcula la probabilidad de seleccionar tres elementos y obtener una bola roja en el primer evento, verde en el segundo y azul en el tercero.

5. Una compañía electrónica acaba de fabricar 5 000 memorias USB, de las cuales el 3% se consideran defectuosas. Si se seleccionan al azar tres de estas memorias para probarlas, ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean defectuosas?

6. Crea un blog personal y a través de él, comparte las respuestas de esta actividad con tus compañeros. Recuerda argumentar para cada caso.

Competencias a desarrollar

- CG 4.1
- CG 4.5
- CG 5.2
- CG 5.6
- CDBM 7
- CDBM 8

Actividad de aprendizaje 7

Realicen, en equipos de cuatro integrantes, una investigación de campo en su comunidad, la cual esté centrada en la observación y ocurrencia de eventos aleatorios y deterministas. Por ejemplo, algún tema relativo a la diversidad cultural, la predicción del clima, la predicción del crecimiento poblacional, los juegos de azar, entre otros. Elaboren un ensayo con la información de su investigación, construyan una situación problémica a partir de ella y resuelvan según corresponda mediante cálculos probabilísticos. Finalmente, destaquen el papel que juega la probabilidad en su vida cotidiana. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

Para elaborar su ensayo pueden hacer uso del apoyo pedagógico acerca del formato y la presentación de un ensayo, encontrarán la información necesaria en http://bit.ly/2GYUaNX

WEB

Consolida lo aprendido en este bloque realizando lo siguiente: **1.** Revisa y analiza junto con un compañero los ejemplos de los recursos: *Probabilidad con diagramas de Venn* (https://bit.ly/2GXDTc3) y *Intersección y unión de conjuntos* (https://bit.ly/2v95ilu); **2.** Creen tres ejemplos y dibujen los diagramas de Venn o resuelvan las probabilidades correspondientes; **3.** Agreguen interactividad a su trabajo usando las herramientas web de *EducaPlay* (http://bit.ly/2HsIW14), que permiten crear actividades de relacionar columnas; así, pueden desafiar a otros equipos a que relacionen los eventos que ustedes creen, con las probabilidades que les correspondan; **4.** Organicen en clase una plenaria para comentar los resultados y la experiencia de trabajo.

Conexiones

Para comprender, dar solución y prevenir los efectos de ciertos fenómenos naturales, diversas áreas del conocimiento se relacionan entre sí. Ahora es momento que relaciones tus aprendizajes en las asignaturas de: Matemáticas 1, Metodología de la investigación, Informática 1, Ética y Taller de lectura y redacción 1. Para ello, debes realizar una investigación acerca de la relación que guarda la probabilidad y el efecto dominó en el análisis de riesgos ambientales. Construye un tríptico con tus hallazgos y socializalo con tus compañeros de grupo; procura que en él se dé respuesta a las preguntas siguientes: ¿De qué otra forma se conoce al efecto dominó? ¿Qué lo detona? ¿Cómo prevenirlo? ¿En cuáles otras áreas también ocurre el efecto dominó?

Habilidad matemática

1. María registra en la siguiente tabla el número de llamadas de larga distancia llevadas a cabo por los empleados de una empresa en los últimos 12 días.

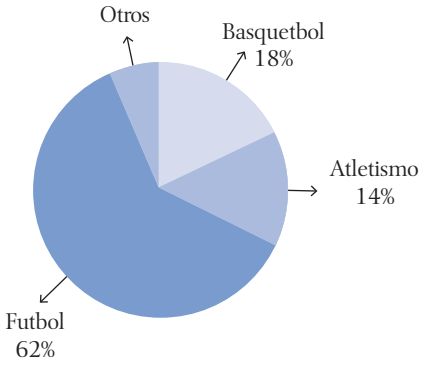
Dia	Llamadas de larga distancia
1	5
2	1
3	5
4	4
5	1
6	6

Dia	Llamadas de larga distancia
7	2
8	0
9	3
10	2
11	3
12	4

Si su jefe le pide la media de los datos, ¿cuál es el dato que le debe proporcionar?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

2. Una encuesta realizada a 1 400 alumnos sobre sus preferencias deportivas, mostró los siguientes resultados:



Determine cuántos alumnos prefieren otros tipos de deportes a los que la mayoría prefiere.

a) 6
b) 1 316
c) 840
d) 84

SOMOS IGUALES

¿Sabías que todas las personas tenemos el derecho a la igualdad sin importar la raza, el género, las creencias, la condición socioeconómica y las capacidades físicas o mentales? El vínculo siguiente https://goo.gl/mZFRH5 presenta un podcast, realizado por los divulgadores de la ciencia españoles Javier Peláez, Javi Álvarez y Antonio Martínez, acerca de cómo ven el mundo las personas con diferentes tipo de mutación genética, el cual los hace diferentes en su aspecto físico al resto de la población. Posterior a escuchar el podcast, socializa tus impresiones con el resto del grupo y juntos den respuesta a las siguientes interrogantes: ¿cómo puedo ser una mejor persona? ¿Cómo seremos una mejor comunidad?

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

1. ¿Cuál es la diferencia entre población y muestra?

2. ¿Qué es un evento determinista y un aleatorio?

3. ¿Qué es marca de clase y para qué sirve?

4. ¿Cuáles son las medidas de tendencia central? y ¿cuáles las de dispersión?

(Continúa)

(Continuación)

Matemáticas gráficas

5. Elabora un histograma y un polígono de frecuencias con los datos de la siguiente tabla.

72	69	70	71	70	75	70	68	65	68
65	74	72	79	73	70	63	70	63	69
69	76	70	79	67	66	72	69	73	71

6. Sea $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 30, 40\}$.
$A = \{$Conjuntos de los números de S divisibles por $2\}$ y, $B = \{$Conjuntos de los números de S divisibles por $2\}$ representa con un diagrama de Venn $A \cap B$ y $A \cup B$.

Ejercicios numéricos

7. Organiza los datos de la tabla siguiente en una tabla de distribución de frecuencias Determina la media, mediana, moda, el rango, la desviación estándar y la varianza.

35	45	42	49	47	34	51	51	40
42	32	45	37	34	51	39	43	50
43	48	41	32	45	43	49	35	42
47	37	43	42	35	37	42	50	42
42	40	35	38	45	32	45	43	37

8. Escribe los elementos de cada uno de los espacios muestrales siguientes:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \text{ es un número impar menor a } 500\}$

b) $S = \{x | x \text{ es el año bisiesto entre 1980 y 2018}\}$

9. Si se lanzan dos dados normales, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea par?

Problemas de aplicación

12. La siguiente tabla muestra las estaturas de los alumnos de una clase de matemáticas. Calcula la media aritmética.

145	147	149	152	153	154	154	156	157	158
162	162	162	163	163	164	164	165	167	167
168	169	169	170	171	171	172	173	174	174
175	176	176	178	179	180	181	183	184	186

(*Continúa*)

(Continuación)

13. En la ferretería el Buen trabajo se han pesado 50 tornillos del mismo tipo y los registraron en la siguiente tabla:

2.8	3.2	3.8	2.5	2.7	3.9	1.9	2.6	3.5	2.3
3.0	2.6	1.8	3.3	2.9	2.1	3.4	2.8	3.1	3.9
2.9	3.5	3.0	3.1	2.2	3.4	2.5	1.9	3.0	2.9
2.4	3.4	2.0	2.6	3.1	2.3	3.5	2.9	3.0	2.7
2.9	2.8	2.7	3.1	3.0	3.1	2.8	2.6	2.9	3.3

Determina el rango, la desviación estándar y la varianza de los valores de la tabla.

14. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un dado de 4 caras de una bolsa que tiene 20 dados de 20 caras, 20 dados de 6 caras y 20 dados de 4 caras?

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este cuarto bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Utilizo medidas de tendencia central y de dispersión para interpretar de forma crítica y consciente un fenómeno social o natural.				
Organizo y represento información mediante métodos gráficos, proponiendo formas innovadoras de solución a diversas problemáticas de mi entorno.				
Evalúo los posibles resultados de un fenómeno social o natural a partir de la elección de un enfoque determinista o aleatorio.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.

Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 335 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Analiza detenidamente cada una de las situaciones que se presentan a continuación y resuelve aplicando tus aprendizajes sobre medidas de tendencia central.	Ejercicios resueltos.	Pág. 97.	Lista de cotejo.
Obtén las medidas de tendencia central y de dispersión de la situación problémica que se presenta a continuación. Analiza tus resultados, contrástalos con la realidad y construye tus propias conclusiones.	Problema de investigación.	Pág. 102.	Guía de observación.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Analiza las situaciones que se presentan a continuación, aplica tus aprendizajes sobre histogramas y polígonos de frecuencias y resuelve según corresponda.	Ejercicios resueltos.	Pág. 105.	Lista de cotejo.
Elaboren, en equipos de cinco integrantes, un proyecto de investigación donde determinen las medidas de tendencia central, así como las medidas de dispersión y la representación gráfica de alguna situación que se relacione con su escuela o entorno.	Proyecto de investigación.	Pág. 107.	Guía de observación.
Analicen, en equipos de cinco integrantes, cada una de las situaciones que se presentan a continuación, apliquen sus aprendizajes y resuelvan según corresponda para cada caso.	Video.	Pág. 112.	Guía de observación.
Analiza las situaciones que se presentan a continuación, aplica tus aprendizajes sobre ley aditiva o multiplicativa y resuelve según corresponda.	Problemas resueltos.	Pág. 126.	Rúbrica.
Realicen, en equipos de cuatro integrantes, una investigación de campo en su comunidad, la cual esté centrada en la observación y ocurrencia de eventos aleatorios y deterministas.	Ensayo.	Pág. 128.	Guía de observación.

BLOQUE 5

Operaciones algebraicas

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
20 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Aplica el álgebra en su vida valorando su importancia para dar solución a problemas relacionados con fenómenos cotidianos.

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES	
Interdisciplinariedad	**Ejes transversales**
Química 1 Taller de Lectura y Redacción 1 Informática 1 Ética 1	Eje transversal Social Eje transversal Ambiental Eje transversal de la Salud Eje transversal de Habilidades lectoras

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG 5.2 Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.
CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CDBM 3 Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

CONOCIMIENTOS

- Lenguaje algebraico.
- Leyes de los exponentes y radicales.
- Operaciones con polinomios.
- Productos notables.
- Factorización.
- Fracciones algebraicas.

ACTITUDES

- Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.
- Expresa libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.
- Maneja y regula sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.

HABILIDADES

- Utiliza operaciones algebraicas para resolver problemas de la vida cotidiana.
- Reconoce el lenguaje algebraico así como las leyes de los exponentes y radicales en la resolución de problemas.
- Identifica los procedimientos para resolver problemas algebraicos.
- Explica la solución de problemas algebraicos.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Utiliza el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.
- Propone procesos de solución identificando posibles errores.
- Aplica el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico.

Aplicar el álgebra en su vida valorando su importancia para dar solución a problemas relacionados con fenómenos cotidianos.

Requiere

Saber conocer

- Lenguaje algebraico
- Leyes de los exponentes y radicales
- Operaciones con polinomios
- Productos notables
- Factorización
- Fracciones algebraicas

Saber hacer

Lo cual implica

- Utilizar operaciones algebraicas para resolver problemas de la vida cotidiana
- Reconocer el lenguaje algebraico así como las leyes de los exponentes y radicales en la resolución de problemas
- Identificar los procedimientos para resolver problemas algebraicos
- Explicar la solución de problemas algebraicos

Saber vivir juntos

- Afrontando retos asumiendo la frustración como parte de un proceso
- Expresando libremente sus ideas, mostrando respeto por las demás opiniones
- Relacionándose con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado
- Manejando y regulando sus emociones reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad

Saber ser

- Utilizando el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones
- Proponiendo procesos de solución identificando posibles errores
- Aplicando el álgebra en su vida cotidiana favoreciendo su pensamiento crítico

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. Cuando la diferencia entre dos cantidades es cero, la relación es una _____.

a) igualdad
b) ecuación
c) identidad
d) operación

2. Un exponente racional es un exponente _____.

a) mixto
b) entero
c) decimal
d) fraccionario

3. La simplificación de $\frac{12x^3-4x^2-2x}{2x}$ es:

a) $6x^2-2x-1$
b) $6x^2+2x+1$
c) $6x^2-2x+1$
d) $6x^2+2x+1$

4. La factorización de $x^2-8x+15$ es:

a) $(x+3)(x-5)$
b) $(x-3)(x-5)$
c) $(x+3)(x+5)$
d) $(x-3)(x+5)$

5. ¿Qué entiendes por polinomio?

6. ¿Cuál es la regla para elevar un binomio al cuadrado?

7. En matemáticas, ¿qué significa factorizar?

8. En tu vida cotidiana, ¿qué utilidad tiene saber factorizar expresiones algebraicas?

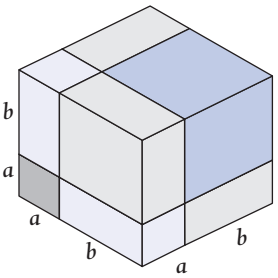
Lenguaje algebraico

¿Cómo determinarías el área que ocupa tu casa? ¿Qué expresión matemática representaría el área de tu casa? ¿Sabías que podemos calcular la altura de un edificio, cascada o torre con el concepto de caída libre?

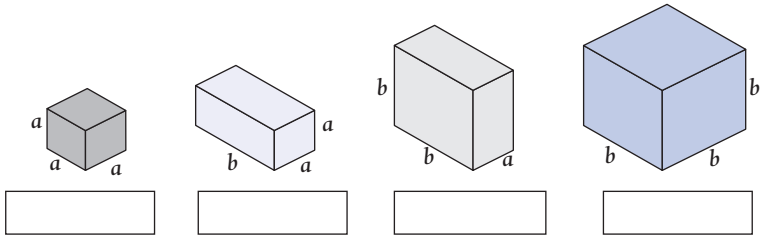
En acción

Analiza las situaciones que a continuación se presentan y resuélvelas según corresponda.

1. La figura siguiente es un cubo cuyos lados miden $a + b$; además, está dividido en varias figuras geométricas. Obsérvalo cuidadosamente para calcular el volumen de cada una y luego identifica y escribe en el recuadro cuántas figuras hay de cada una en el cubo.



$V_1 =$ $V_2 =$ $V_3 =$ $V_4 =$



a) ¿Cuál es el volumen total del cubo?

b) Con ayuda de tus compañeros diseña una expresión algebraica para calcular directamente el volumen del cubo mayor.

c) Una de las siguientes expresiones nos proporciona el volumen total del cubo mayor. ¿Con cuál de ellas coincides?

i. $a^3 + 3ab + 3ab + b^3$
ii. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
iii. $a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3$

d) Con el apoyo de tu maestro y demás compañeros de clase, redacten una conclusión final.

2. Se desea diseñar una caja rectangular abierta por arriba cortando cuadrados de lado *x* en las esquinas de una pieza de cartón que mide 6 por 6 pulgadas, como se muestra en la **Figura 5.1**.

a) Escribe un modelo, o expresión, para encontrar el volumen de la caja. *Sugerencia*: para encontrar el modelo que calcule el volumen de la caja, observa la Figura 5.1 y fíjate que tienes que multiplicar el área de la base por la altura.

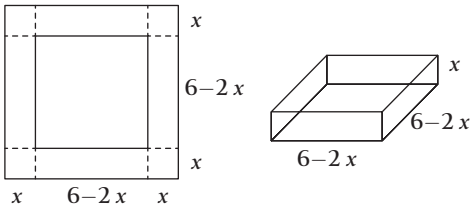


Figura 5.1 Caja de cartón de 6×6 pulgadas.

b) Calcula el volumen de 3 cajas diferentes para valores de $x = 1$, 2 y 3 pulgadas. ¿Qué significan estos valores?

c) La gráfica de la **Figura 5.2** muestra el volumen de diferentes cajas para valores de *x* entre 0 y 3 pulgadas. De acuerdo con tu apreciación, ¿para cuál valor de *x* el volumen de la caja es mayor?

d) Reúnete con un compañero y definan, ¿qué significa la gráfica?

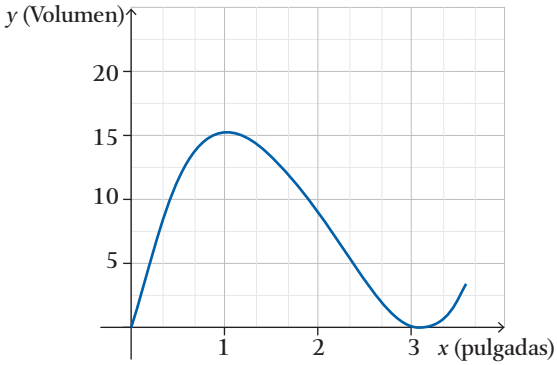


Figura 5.2 Comportamiento del volumen de diferentes cajas.

Conceptos básicos

Antes de iniciar el tema de *polinomios* es necesario revisar algunos conceptos importantes.

Igualdad

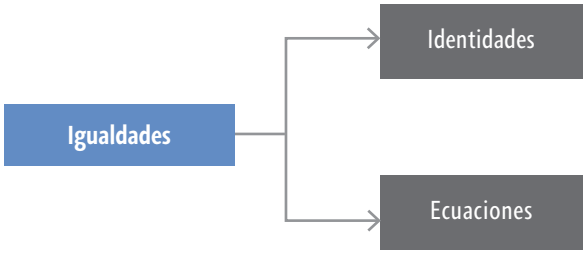
Es la relación que se establece entre dos cantidades o expresiones algebraicas cuya diferencia es cero.

Esta relación se expresa vinculando las cantidades o expresiones algebraicas en cuestión mediante el signo =, que se lee *igual a*. Algunos ejemplos de igualdades son:

$$2x+4=6-10x; \qquad (a+b)(a-b)=a^2-b^2; \qquad 10k^2-6k-2=0$$

Clasificación de las igualdades

Las igualdades pueden clasificarse como lo muestra el diagrama siguiente:



Una *identidad* es una igualdad que se cumple para cualquier valor que tomen las variables que están presentes en ella. Para indicar esta relación se utiliza el signo $\equiv$, que se lee como *es idéntico a*. Dos ejemplos de identidades son:

$$x + y \equiv y + x; \qquad (a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

Una *ecuación* es una igualdad en la que también hay una o varias cantidades desconocidas, sólo que, en este caso, la relación se cumple únicamente para determinados valores de las variables implicadas. Algunos ejemplos de ecuaciones son:

$$20x - 12 = 8 - 3x; \qquad k^3 - 8 = 0; \qquad \frac{9x-9}{12-15x} = 6 - 3y$$

Las partes o expresiones separadas por el signo $=$ en una igualdad reciben el nombre de **miembros**, mientras que los números o cantidades relacionados con los signos $+$ o $-$ en cada miembro se llaman **términos**.

$$\underbrace{\overbrace{4x}^{\text{Término}} - 10}_{\text{1er. miembro}} \quad \underbrace{2x + \overbrace{34}^{\text{Término}}}_{\text{2do. miembro}}$$

Propiedades de las igualdades

En las propiedades siguientes, a, b y c son números reales.

Propiedad	Igualdad	Significado
Aditiva	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	Si a una igualdad se le suma la misma cantidad en ambos miembros, la relación de igualdad permanece.
Sustractiva	$a = b \Rightarrow a - c = b - c$	Si a una igualdad se le resta la misma cantidad en ambos miembros, la relación de igualdad permanece.
Multiplicativa	$a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$	Cuando en una igualdad el miembro de la izquierda y el miembro de la derecha se multiplican por la misma cantidad, la igualdad no se altera.
Divisora	$a = b \Rightarrow a \div c = b \div c$	Cuando en una igualdad el miembro de la izquierda y el miembro de la derecha se dividen entre la misma cantidad, la igualdad no se altera.
Sustitución	$a = b \Rightarrow b = a$	Si $a = b$, entonces a puede sustituir a b en cualquier expresión algebraica para dar una expresión equivalente.

Leyes de los exponentes y radicales

¿Cómo determinarías el área que ocupa tu casa? ¿Qué expresión matemática representaría el área de tu casa? ¿Sabías que podemos calcular la altura de un edificio, cascada o torre con el concepto de caída libre?

Notación exponencial

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la enésima potencia de a es:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se conoce como **base** y n como **exponente**.

Ejemplos

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$
2. $-6^5 = -(6\times6\times6\times6\times6) = -7\,776$
3. $(-6)^5 = (-6)(-6)(-6)(-6)(-6) = -7\,776$
4. $\left(3^3\right)\left(3^2\right) = (3\times3\times3)(3\times3) = (3)^5 = 243$

Multiplicación de potencias con la misma base

Es fácil concluir que la notación exponencial, finalmente, es una multiplicación abreviada en la que los factores se repiten n veces. Por eso es que, a partir de su definición, podemos enunciar varias reglas útiles que nos permitan trabajar de manera más rápida y eficiente con los exponentes.

Para multiplicar dos potencias de la misma base se procede de la siguiente manera:

$$5^5 \times 5^3 = \underbrace{(5\times5\times5\times5\times5)}_{5 \text{ factores}}\underbrace{(5\times5\times5)}_{3 \text{ factores}} = \underbrace{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}_{8 \text{ factores}} = 5^8 = 5^{5+3}$$

La evidencia nos indica que *para multiplicar dos potencias con la misma base, sumamos sus exponentes*. En general, si a es un número real, y m y n son dos enteros positivos cualesquiera, entonces:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{m \text{ factores}}\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

De esta manera, hemos demostrado que:

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

donde m y n son enteros positivos.

Cuando m y n son 0 o enteros negativos, entonces se cumple que:

$$4^0 \times 4^4 = 4^{0+4} = 4^4,$$

pero esto sólo se cumple si $4^0 = 1$. Asimismo, debemos tener en cuenta que:

$$4^3 \times 4^{-3} = 4^{3+(-3)} = 4^0 = 1$$

Esto es cierto si $4^{-3} = \frac{1}{4^3}$.

Ejemplos

1. $a^{-1}=\frac{1}{a}$
2. $\left(\frac{9}{2}\right)^{0}=1$
3. $(-7)^{0}=1$

División de potencias con la misma base

Si vamos a *dividir dos potencias con la misma base*, podemos tomar de referencia lo anterior para concluir el patrón de comportamiento, es decir:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^m\frac{1}{a^n}=a^m a^{-n}=a^{m+(-n)}=a^{m-n}$$

Las operaciones nos indican que *para dividir dos potencias con la misma base, restamos sus exponentes*. Es decir:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Ejemplos

1. $\frac{x^6}{x^3}=x^{6-3}=x^3$
2. $\frac{3^8}{3^5}=3^{8-5}=3^3=27$

Elevar una potencia a otra potencia

Si m y n son enteros positivos, tenemos que:

$$\left(a^m\right)^n=\left(\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ factores}}\right)^n=\underbrace{\left(\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ factores}}\right)\times\left(\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ factores}}\right)\times\ldots\times\left(\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ factores}}\right)}_{n\text{ factores}}$$

$$=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m\text{ factores}}=a^{mn}$$

Por lo tanto:

$$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$$

Los casos en que $m\leq 0$ o $n\leq 0$ se prueban con la definición para exponentes negativos.

Ejemplos

1. $\left(2^3\right)^4=2^{(3)(4)}=2^{12}=4\,096$
2. $\left(x^{-2}\right)^7=x^{(-2)(7)}=x^{-14}=\frac{1}{x^{14}}$

Leyes o reglas de los exponentes

Como estudiamos en el bloque 1 las leyes de los exponentes se pueden resumir en la tabla siguiente, donde que a y b son números reales, y los exponentes m y n son enteros.

Ley	Descripción	Ejemplo
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	Si multiplicamos dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.	$3^2 \times 3^3 = 3^5 = 243$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias con la misma base, restamos sus exponentes.	$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a una nueva se multiplican los exponentes.	$(b^2)^4 = b^{2\times 4} = b^8$
4. $(ab)^n = a^n b^n$	Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada factor a la potencia.	$(3y)^2 = 3^2 y^2 = 9y^2$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Para elevar un cociente a una potencia, se eleva tanto el numerador como el denominador a la potencia.	$\left(\frac{x}{6}\right)^4 = \frac{x^4}{6^4} = \frac{x^4}{1296}$
6. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	Para mover del numerador al denominador o del denominador al numerador un número elevado a una potencia, se cambia el signo del exponente.	$\frac{x^{-n}}{y^{-m}} = \frac{1}{x^n} \times \frac{y^m}{1} = \frac{y^m}{x^n}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, se invierte la fracción y se cambia el signo del exponente.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1}{a^n} \times \frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n}$

Simplificación de expresiones con exponentes

Ejemplo

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

Simplifica:

a) $(2x^3)(4x)^2$

b) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \left(\frac{y^2 x}{z}\right)^5$

Solución

a) $(2x^3)(4x)^2 = (2x^3)(4^2 x^2)$ Ley 4.

$= (2x^3)(16x^2)$ Ley 3.

$= (2)(16)x^{3+2}$ Ley 1 y agrupamiento de términos.

$= 32x^5$

b) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 \left(\frac{y^2 x}{z}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5} \times \frac{(y^2)^5 x^5}{z^5}$ Leyes 4 y 5.

$= \frac{x^{5+5} y^{2\times 5}}{y^5 z^5} = \frac{x^{10} y^{10}}{y^5 z^5}$ Leyes 1 y 3.

$= \frac{x^{10} y^{10-5}}{z^5} = \frac{x^{10} y^5}{z^5}$ Ley 2 y agrupamiento de términos.

En acción

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo siguiente.

1. Calcula las potencias que se presentan a continuación:

a) $(-2)^6 =$	b) $-3^3 =$	c) $\pi^0 =$
d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$	e) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times (2)^{-2} =$	f) $\left(\frac{4}{3}\right)^0 \times (5)^{-2} =$
g) $2^{-6} \times 7^3 =$	h) $\frac{4^5}{4^2} =$	i) $(6^3 \times 6^4)^2 =$

2. Simplifica las siguientes expresiones y escríbelas sólo con exponentes positivos.

a) $x^{-3}x^{10} =$	b) $(2x)^5 =$
c) $(7a^4b)(4a^7b^8) =$	d) $(2ab)^5(3b^{-8})(5a)^7 =$
e) $\frac{x^4(3x)^2}{x^2} =$	f) $\frac{(4x)^5}{4x^7} =$
g) $\frac{(x^2y^3)^4(xy^{-4})^{-3}}{x^2y} =$	h) $\frac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3} =$

Radicales

Ya sabemos lo que significa 2^n cuando n es un entero, pero valdría la pena preguntarse el significado de una expresión como $2^{\frac{3}{5}}$, donde el exponente es un número racional, es decir, no es entero. Para esto es necesario conocer y analizar los **radicales**.

El símbolo $\sqrt{\ }$ significa *raíz cuadrada positiva*. De manera que:

$$\sqrt{x} = a, \text{ significa que, } a^2 = x \text{ y que } a \geq 0.$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2, \text{ porque, } 2^2 = 4 \text{ y evidentemente } 2 \geq 0.$$

Quizás estés pensando que el número 4 tiene dos raíces cuadradas: 2 y -2. Pero por convención, se sugiere que cuando se desee la raíz cuadrada negativa, se debe escribir $-\sqrt{4} = -2$, ya que la raíz positiva 2 se conoce como la raíz cuadrada principal de 4.

Además de las raíces cuadradas, existen las raíces cúbicas, raíces cuartas y, en general, raíces enésimas. La raíz enésima de x es el número que, al ser elevado a la enésima potencia, nos produce x.

Leyes de los radicales

Raíz enésima

Si n es cualquier número entero positivo, entonces la raíz enésima principal de x se define como:

$$\sqrt[n]{x} = a \quad \text{y significa que} \quad a^n = x$$

Si n es par, tenemos que considerar que $x \geq 0$ y $a \geq 0$.
De acuerdo con la definición anterior, tenemos que:

$$\sqrt[6]{729} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^6 = 729 \text{ y } 3 \geq 0$$
$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad \text{porque} \quad (-2)^5 = -32$$

Es muy importante aclarar que las raíces pares de *números negativos no están definidas*. Por ejemplo $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$, etc., no están definidas porque no hay ningún número que al elevarse a una potencia par nos dé un número real negativo. Algunas de las leyes o propiedades se estudian en la **Tabla 5.1**.

Tabla 5.1 Propiedades de las raíces enésimas.

Propiedad	Ejemplos
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \times 27} = \sqrt[3]{-8}\ \sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3;\ \sqrt[5]{4^5} = 4$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

1. Utiliza las propiedades de las raíces para calcular el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{36} \times \sqrt{4}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$ c) $\sqrt[8]{256}$

Solución

a) $\sqrt{36} \times \sqrt{4} = \sqrt{36 \times 4} = \sqrt{144} = 12$ Propiedad 1.

b) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{243}{3}} = \sqrt[4]{81} = 3$ Propiedad 2.

c) $\sqrt[8]{256} = \sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{16} = 2$ Propiedad 3.

2. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas que contienen radicales.

a) $\sqrt[5]{x^8} = \sqrt[5]{x^5 x^3}$

Solución

Factorizamos la potencia cúbica más grande. Es decir:

$$\sqrt[5]{x^8} = \sqrt[5]{x^5 x^3}$$
$$= \sqrt[5]{x^5} \times \sqrt[5]{x^3} \quad \text{Propiedad 1.}$$
$$= x\sqrt[5]{x^3} \quad \text{Propiedad 4.}$$

(Continúa)

(Continuación)

b) $\sqrt[6]{64x^{12}y^6} = \sqrt[6]{64} \times \sqrt[6]{x^{12}} \times \sqrt[6]{y^6}$

Solución

Factorizamos la potencia cúbica más grande. Es decir:

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{64x^{12}y^6} &= \sqrt[6]{64} \times \sqrt[6]{x^{12}} \times \sqrt[6]{y^6} && \text{Propiedad 1.} \\ &= \sqrt[6]{2^6} \times \sqrt[6]{\left(x^2\right)^6} \times y && \text{Propiedad 5.} \\ &= 2x^2y \end{aligned}$$

En acción

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

1. Evalúa las siguientes expresiones:

a) $\sqrt[5]{-1024} =$	b) $\sqrt{\frac{9}{16}} =$
c) $\sqrt[3]{343} =$	d) $\sqrt[4]{4}\ \sqrt[4]{16} =$
e) $\frac{\sqrt{192}}{\sqrt{3}} =$	f) $\frac{\sqrt[6]{2916}}{\sqrt[6]{4}} =$

2. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{x^2} =$	b) $\sqrt[4]{x^4y} =$
c) $\sqrt[3]{a^5b^4} =$	d) $\sqrt[4]{\sqrt{256x^8}} =$
e) $\sqrt[7]{x^7y^8} =$	f) $\sqrt{x^4y^4} =$

Exponentes racionales

Un exponente racional es un *exponente fraccionario*. Por ejemplo, en $x^{\frac{2}{3}}$ es necesario utilizar *radicales* para expresar el exponente. Con el propósito de encontrar significado a una expresión como $x^{\frac{1}{n}}$, recordemos las leyes de los exponentes:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

Así, a partir de la definición de raíz enésima, tenemos que:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

En general, un exponente racional se define como:

Si m y n son enteros, y $n > 0$, entonces, para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$ expresado en su forma más sencilla, tenemos que:

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

esto significa que vamos a calcular la raíz enésima de x^m.

Si n es par, tenemos que considerar que $x \geq 0$.

Esta definición nos lleva a concluir que las leyes de los exponentes también son válidas para los exponentes racionales.

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

1. De acuerdo con la definición anterior, los exponentes racionales se pueden expresar como:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

b) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

c) $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

d) $(32)^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{32^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a^5}} = \dfrac{1}{a^{\frac{5}{2}}} = a^{-\frac{5}{2}}$

2. Las leyes para los exponentes racionales son las mismas que para los exponentes enteros. Es decir:

a) $y^{\frac{4}{3}} \times y^{\frac{8}{3}} = y^{\frac{4}{3}+\frac{8}{3}} = y^{\frac{12}{3}} = y^4$

b) $\dfrac{x^{\frac{5}{4}} \times x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{5}{4}+\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{9}{4}}$

c) $\left(x^5 \times y^6\right)^{\frac{5}{3}} = \left(x^5\right)^{\frac{5}{3}}\left(y^6\right)^{\frac{5}{3}} = x^{5\left(\frac{5}{3}\right)} y^{6\left(\frac{5}{3}\right)}$
$= x^{\frac{25}{3}} y^{10}$

d) $\left(\dfrac{3a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^3 \left(\dfrac{b^4}{a^{-\frac{1}{2}}}\right) = 3^3 \dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3}{\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}\left(b^4 a^{\frac{1}{2}}\right)$
$= 27\dfrac{a^{\frac{9}{4}}}{b} \times b^4 a^{\frac{1}{2}}$
$= 27a^{\frac{9}{4}+\frac{1}{2}} b^{4-1}$
$= 27x^{\frac{11}{4}} b^3$

3. Los radicales son exponentes fraccionarios, de tal modo que:

a) $\left(3\sqrt[3]{x}\right)\left(4\sqrt[5]{x}\right) = 12x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{5}}$
$= 12x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 12x^{\frac{5+3}{15}}$
$= 12x^{\frac{8}{15}}$

b) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x \times x^{\frac{1}{2}}} = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$
$= \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$

En acción

Simplifica la expresión y elimina cualquier exponente negativo. Supón que todas las letras indican números positivos.

a) $a^{\frac{4}{5}}a^{\frac{1}{7}} =$	b) $(2x)^{\frac{1}{2}} \times 8x^{\frac{2}{5}} =$
c) $\left(x^2y^3\right)^{-\frac{1}{3}} =$	d) $\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} =$
e) $\left(3c^4d^{-\frac{4}{5}}\right)^3\left(6d^2\right)^{\frac{2}{3}} =$	f) $\left(\frac{a^6b}{b^4}\right)^{\frac{5}{2}}$

Operaciones con polinomios

¿Qué elementos son necesarios para determinar el área de tu habitación? ¿Qué expresión matemática representaría el perímetro de tu habitación? ¿Cómo realizarías el cálculo de dicho perímetro?

GLOSARIO

Polinomio. Expresión algebraica que resulta de la suma o resta de uno o más monomios.

Cualquier **polinomio** es una suma de términos de la forma ax^n, llamados **monomios**, donde a es una constante y n es un entero no negativo.

La forma general de un polinomio de grado n (donde n es un entero no negativo) en la variable x es:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x_1 + a_0,$$

donde a_0, a_1, …, a_n son constantes y $a_n \neq 0$.

Un **binomio** es la suma de dos monomios, un **trinomio** es la suma de tres monomios y así sucesivamente.

Por ejemplo, $5x^2 - 2x + 4$, $3x + 7$ y $x^4 + 2x^3$ son polinomios de grado 2, 1 y 4, respectivamente; el primero es un trinomio, y los otros dos son binomios.

En acción

Elabora un tríptico acerca de los polinomios de una variable en el que se identifiquen los elementos de un polinomio y cómo se llaman cada uno de ellos.

Pueden trabajar esta actividad con un tríptico en línea. En la siguiente liga de internet encontrarán dos programas que pueden ser de utilidad (http://bit.ly/2JaUo0O).

Términos semejantes

Cuando dos o más términos tienen la misma parte literal, es decir, tienen las mismas variables con los mismos exponentes, se llaman *términos semejantes*.

Ejemplos

1. $5x^2y^2$ y $-4x^2y^2$ Son términos semejantes.
2. $2ab$ y $-\frac{1}{2}ab$ Son términos semejantes.
3. $\sqrt{2}c^2d$ y $-6c^2d$ Son términos semejantes.

Signos de agrupación

Estos signos ya los explicamos en un apartado anterior. Ahora es importante recordar que su función es, principalmente, la de indicar que las operaciones localizadas en su interior son las que se deben efectuar primero; además, si un *signo negativo* antecede a una expresión entre paréntesis, cuando eliminamos dichos paréntesis *todos los términos de adentro cambian de signo.*

( )	paréntesis
[ ]	corchetes
{ }	llaves

Por ejemplo, simplifiquemos la siguiente expresión y reduzcamos los términos semejantes.

$$\underbrace{\left\{4x^2-5xy+4y^3-\underbrace{\left[-4xy+5x^2+\underbrace{\left(-4x^2+3xy-6y^3\right)}_{\text{Primero}}\right]}_{\text{Segundo}}+5xy-4y^3\right\}}_{\text{Tercero}}$$

$$=\left\{4x^2-5xy+4y^3-\left[-4xy+5x^2\ \underbrace{-4x^2+3xy-6y^3}_{\substack{\text{Conservar el mismo signo}\\ \text{porque les precede un }+}}\right]+5xy-4y^3\right\}$$

$$=\left\{4x^2-5xy+4y^3\underbrace{+4xy-5x^2+4x^2-3xy+6y^3}_{\text{Cambian de signo porque les precede un }-}+5xy-4y^3\right\}$$

$$=4x^2-5xy+4y^3+4xy-5x^2+4x^2-3xy+6y^3+5xy-4y^3$$

$$=(4-5+4)x^2+(-5+4-3+5)xy+(4+6-4)y^3 \qquad \text{Agrupamos términos semejantes.}$$

$$=3x^2+xy+6y^3$$

Suma y resta de polinomios

Cuando sumamos y restamos polinomios, lo que estamos haciendo es combinar términos semejantes. Para ello, utilizamos las propiedades de los números reales que vimos al principio de este curso.

Suma de polinomios

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

1. Calcula la suma de $\left(\frac{3}{4}q^2+\frac{5}{6}q\right)+\left(3q+\frac{2}{3}q^2\right)+\left(-\frac{5}{3}q^2-\frac{7}{9}q\right)$.

Solución

$$\left(\frac{3}{4}q^2+\frac{5}{6}q\right)+\left(3q+\frac{2}{3}q^2\right)+\left(-\frac{5}{3}q^2-\frac{7}{9}q\right)=\left(\frac{3}{4}q^2+\frac{2}{3}q^2-\frac{5}{3}q^2\right)+\left(\frac{5}{6}q+3q-\frac{7}{9}q\right)$$ Agrupamos términos semejantes.

$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\right)q^2+\left(\frac{5}{6}+3-\frac{7}{9}\right)q$$ Aislamos los coeficientes fraccionarios.

$$=\left(\frac{9+8-20}{12}\right)q^2+\left(\frac{45+162-42}{54}\right)q$$ Realizamos las operaciones.

$$=\frac{-3}{12}q^2+\frac{165}{54}q=-\frac{1}{4}q^2+\frac{55}{18}q$$

2. La utilidad U en un negocio puede obtenerse restando los costos C de su precio de venta V. Es decir:

$$U=V-C$$

El costo de producir x artículos es \$5 por unidad más \$75 de gastos fijos. Si el precio de venta es de \$15, ¿cuál es su utilidad?

Solución

El costo de producción es $C=5x+75$; las ventas totales son $V=15x$; por consiguiente, la utilidad será:

$$U=V-C=15x-(5x+75)$$
$$U=15x-5x-75$$
$$U=10x-75$$

En acción

Resuelve las siguientes adiciones de polinomios.

Operación	Solución
a) $\left(3x^3-2x^2+2x\right)+\left(x^3+2x^2+3x\right)$	
b) $\left(-4y^2+5y^3-8+2y\right)+\left(3y^4-2y^3+y^2+6\right)$	
c) $\left(2a-a^3\right)+\left(-3a^3-4a^2-5a\right)+\left(6a^3+7a^2+8a\right)$	

Resta de polinomios

Ejemplo

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

Calcula la resta de $\left(7p^3-8p+5\right)-\left(3p^3+4p^2-2p+8\right)$.

Solución

$$(7p^3-8p+5)-(3p^3+4p^2-2p+8)=\underbrace{\left(7p^3-8p+5\right)}_{\text{Minuendo}}-\underbrace{\left(3p^3+4p^2-2p+8\right)}_{\text{Sustraendo}}$$

$$=\left(7p^3-8p+5\right)+\underbrace{\left(-3p^3-4p^2+2p-8\right)}_{\text{Los signos en el sustraendo cambian}}$$

$$=\left(7p^3-3p^3\right)+\left(-4p^2\right)+(-8p+2p)+(5-8)$$

$$=4p^3-4p^2-6p-3$$

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

1. Resuelve las siguientes sustracciones de polinomios.

Operación	Solución
a) $\left(2a^2-7a+4\right)-\left(3a^3-5a+6\right)$	
b) $\left(5y^3+3y-4y^2+5\right)-\ 6y^4-y^2+5y$	

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

1. $(3a^2)(4a-3) = 3a^2(4a) + 3a^2(-3)$
$= 12a^3 - 9a^2$

2. $(5x-4)(6x-8) = 5x(6x-8) + (-4)(6x-8)$
$= 30x^2 - 40x + (-24x + 32)$
$= 30x^2 - 40x - 24x + 32$
$= 30x^2 - 64x + 32$

3. $3(2u-4)(u^3+2u+3) = 3\left[2u(u^3+2u+3) + (-4)(u^3+2u+3)\right]$
$= 3\left[2u^4 + 4u^2 + 6u + (-4u^3 - 8u - 12)\right]$
$= 3\left[2u^4 - 4u^3 + 4u^2 + 2u - 12\right]$
$= 6u^4 - 12u^3 + 12u^2 + 6u - 36$

En acción

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

1. Obtén el producto de las siguientes multiplicaciones:

Multiplicación	Solución
a) $(5a^5)(4a^3)$	
b) $(7x)(8x^5)$	
c) $(2y)(3y - 2y^2 + 3)$	
d) $(2u^3 - 4u^2 + 5u)(3u^3)$	
e) $(3-5x)(7+3x)$	
f) $(u^2 - 2u + 1)(u-2)$	
g) $(a+3)(a+3)$	
h) $(y+3)(y-5)$	

2. En relación con la **Figura 5.3**, calcula el área del:
a) rectángulo mayor. b) rectángulo menor. c) espacio sombreado.

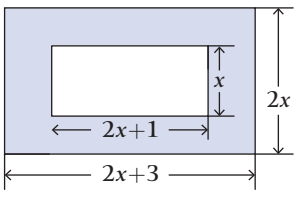


Figura 5.3 Rectángulo inscrito en otro rectángulo.

3. Calcula el área de la cruz en blanco que se muestra en la **Figura 5.4**.

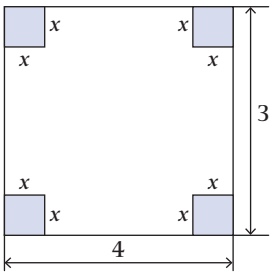


Figura 5.4 Cruz inscrita en un cuadrado.

4. ¿Cómo se calcularía el volumen de la **Figura 5.5**?

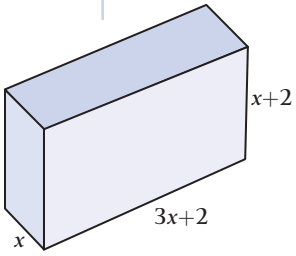


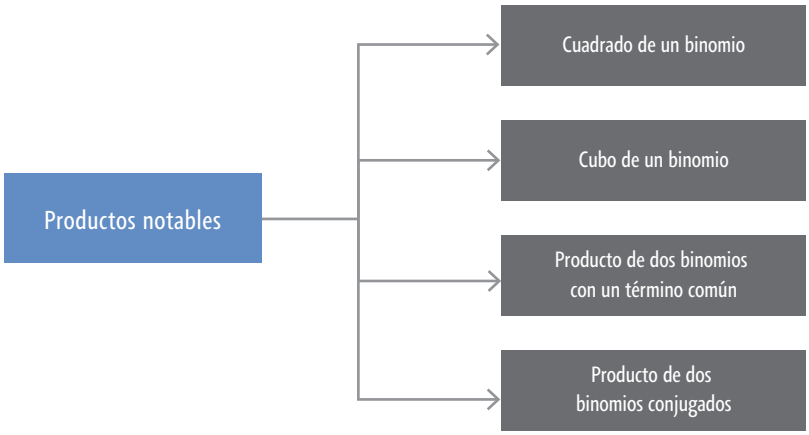
Figura 5.5 Prisma.

Productos notables

Los productos notables son fórmulas para obtener productos de multiplicaciones de manera más rápida y eficiente. Esto se logra al abreviar la aplicación del algoritmo normal estudiado en apartados anteriores.

Estas fórmulas son *transformaciones algebraicas* que, con la utilización adecuada de las propiedades de los números reales, nos permiten obtener las relaciones que generan los productos correctos para la operación que definen.

En esta parte del curso veremos algunas expresiones algebraicas cuyos productos pueden obtenerse a partir de una regla general, sin tener que realizar la multiplicación directa. Estos procesos generales se conocen como **productos notables**.



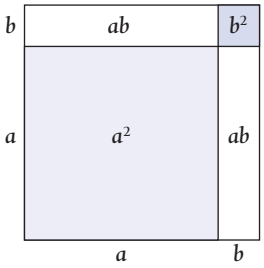


Figura 5.6 Cuadrado de un binomio.

Cuadrado de un binomio

Observa la **Figura 5.6** y analiza que el área es igual a:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esta interpretación geométrica de elevar un binomio al cuadrado se puede enunciar algebraicamente de la siguiente manera:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{a+b \text{ al cuadrado}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{Cuadrado del} \\ \text{primer término}}} + \underbrace{2ab}_{\substack{\text{Doble del primer} \\ \text{término por el segundo}}} + \underbrace{b^2}_{\substack{\text{Cuadrado del} \\ \text{segundo término}}}$$

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

Haremos uso de la regla para elevar un binomio al cuadrado.

1. $(x+2)^2 = (x)^2 + 2(x)(2) + (2)^2$
$= x^2 + 4x + 4$

2. $(3a-5b)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(-5b) + (-5b)^2$
$= 9a^2 - 30ab + 25b^2$

3. $\left(p^x - \frac{3}{5}\right)^2 = \left(p^x\right)^2 + 2\left(p^x\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)^2$
$= p^{2x} - \frac{6}{5}p^x + \frac{9}{25}$

4. $(a+2b-c)^2 = [(a+2b)-c]^2 = (a+2b)^2 + 2(a+2b)(-c) + (-c)^2$
$= a^2 + 4ab + 4b^2 - 2ac - 4bc + c^2$

La regla anterior es muy útil para facilitar el cálculo de cuadrados numéricos cuando no tenemos una calculadora a nuestro alcance. Analicemos los siguientes ejemplos:

1. $(34)^2 = (30+4)^2 = (30)^2 + 2(30)(4) + (4)^2 = 900 + 240 + 16 = 1156$
2. $(37)^2 = (40-3)^2 = (40)^2 + 2(40)(-3) + (-3)^2 = 1600 - 240 + 9 = 1369$

Los ejemplos anteriores nos indican que el producto que obtenemos al elevar un binomio al cuadrado está formado por tres términos: el primero y el tercero son el cuadrado de cada uno de los términos del binomio, y el segundo es el doble producto de éstos. Un trinomio con estas características se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

En acción

Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(3x-2)^2 =$

b) $(2y+7)^2 =$

c) $(5a+b-6)^2 =$

Producto de dos binomios conjugados

Encuentra el área de la región sombreada en la **Figura 5.7** realizando la siguiente operación:

$$A = a(a-b) + b(a-b)$$

Como podrás constatar en la Figura 5.7, la multiplicación anterior es equivalente a multiplicar $(a+b)(a-b)$. Es decir:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$$

Los binomios como los anteriores se llaman **conjugados** porque tienen dos términos que son exactamente iguales y los otros dos difieren sólo en el signo. Como viste en las multiplicaciones anteriores, su *producto es la diferencia de sus cuadrados.*

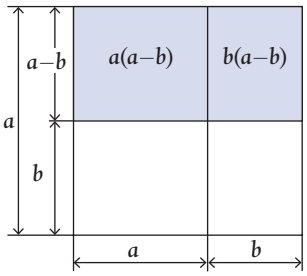


Figura 5.7 Producto de dos binomios conjugados.

Regla

El producto de dos binomios conjugados da como resultado la diferencia de los cuadrados de sus términos. Matemáticamente se expresa como:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ejemplos

Observa detalladamente la solución de los siguientes productos de binomios conjugados.

1. $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$
2. $(2a-3)(2a+3) = (2a)^2 - (3)^2 = 4a^2 - 9$
3. $(3x+2y)(3x-2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$
4. $(x+4y-2z)(x+4y-2z) = (x+4y)^2 - (2z)^2 = x^2 + 8xy + 16y - 4z^2$

En acción

Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(a-11)(a+11) =$

b) $\left(p-\sqrt{3}\right)\left(p+\sqrt{3}\right) =$

c) $(2x-7)(-2x-7) =$

Producto de dos binomios con un término común

Calcula el área A del rectángulo que se muestra en la **Figura 5.8**.

Habrás observado que hay un elemento común, la x, al sumar las áreas de cada región en las que están divididos los rectángulos. Es decir:

$$A = x^2 + mx + nx + mn = x^2 + (m+n)x + mn.$$

El cálculo de este tipo de productos recibe el nombre de **binomio con un término común**, y su regla es la siguiente.

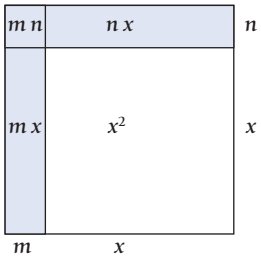


Figura 5.8 Producto de dos binomios con un término común.

Regla

Cuadrado del común, más la suma de los no comunes por el común, más el producto de los no comunes. Matemáticamente se expresa como:

$$(x+m)(x+n) = \underbrace{x^2}_{\text{Cuadrado del común}} + \underbrace{(m+n)x}_{\text{Suma de los no comunes por el común}} + \underbrace{mn}_{\text{Producto de los no comunes}}$$

Ejemplos

Observa detalladamente la solución de los siguientes productos de dos binomios con un término común.

1. $(x+4)(x-3) = x^2 + (4-3)x + (4)(-3) = x^2 + x - 12$
2. $(4a+5)(4a-7) = (4a)^2 + (5-7)4a + (5)(-7) = 16a^2 - 8a - 35$

En acción

Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(a-4)(a-7) =$

b) $(x+2)(x-5) =$

c) $(6u-3)(6u+13) =$

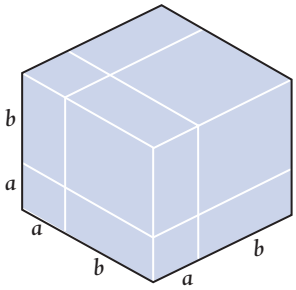


Figura 5.9 Cubo de un binomio.

Cubo de un binomio

Otro producto notable muy útil es el **cubo de un binomio**, cuya regla se obtiene a partir del desarrollo del algoritmo normal de la multiplicación (**Figura 5.9**).

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Regla

El cubo del primer término, más el triple del cuadrado del primero por el segundo término, más el triple del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término. Matemáticamente se expresa como:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Ejemplos

Observa detalladamente el uso de la regla para elevar un binomio al cubo.

1. $(3u+4)^3 = (3u)^3 + 3(3u)^2(4) + 3(3u)(4)^2 + (4)^3$
$= 27u^3 + 108u^2 + 144u + 64$

2. $(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2 + (3b)^3$
$= 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

En acción

Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(3y+8)^3 =$

b) $(4a-7)^3 =$

Factorización

¿Has reflexionado que para memorizar un número vas separando el número en factores? Cuando compras diferentes cosas, ¿cómo calculas el precio total?

Por lo general, los materiales se **dilatan** cuando se someten a un cambio de temperatura.

Por ejemplo, una barra metálica sufre un cambio de longitud $\Delta l = \alpha l_0 t - \alpha l_0 t_0$ cuando la temperatura se modifica de una temperatura inicial t_0 a una temperatura final t. ¿Cómo puedes escribir de una manera más simple esta expresión algebraica?

GLOSARIO

Dilatación. Proceso físico de expansión o contracción que sufren los materiales al ser sometidos a una variación de temperatura.

Cuando utilizamos la propiedad distributiva de las expresiones en sentido inverso al desarrollo de la multiplicación o de los productos notables, lo que estamos realizando es un proceso que se llama **factorización**. Por ejemplo, escribimos:

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$

Factorización →

← Desarrollo

Factor común en un polinomio

En la tabla siguiente se muestran dos ejemplos. Compara los productos con los factores y observa si puedes descubrir un patrón de comportamiento.

Producto	Factores
$5(a+b)=5a+5b$ $3p(x+7)=3px+21p$	$5a+5b=5(a+b)$ $3px+21p=3p(x+7)$

Lo que nos revelan los ejemplos anteriores es que tenemos que encontrar un factor común a todos los términos de la expresión y que, para poder factorizar el polinomio por completo, es necesario seleccionar el *máximo factor común*, ax^n; donde a es el máximo entero que divide a cada uno de los coeficientes del polinomio y n es el mínimo exponente de x en todos los términos del polinomio.

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

1. Factoriza $4a^3 + 12a^2$.

Solución

Aquí tenemos que 4 y 12 tienen como máximo factor común a 4, mientras que a^3 y a^2 tienen como máximo factor común a a^2, así que, podemos escribirlo como:

$$4a^3+12a^2=4a^2(a+3)$$

Verificamos la multiplicación:

$$4a^2(a+3)=4a^3+12a^2$$

2. Factoriza $9x^3y^2+3x^2y^3-15xy^4$.

Solución

Aquí tenemos que 9, 3 y 15 tienen como máximo factor común a 3, mientras que x^3y^2, x^2y^3 y xy^4; tienen como máximo factor común a xy^2. Por lo tanto, escribimos:

$$\begin{aligned}9x^3y^2+3x^2y^3-15xy^4&=(3xy^2)(3x^2)+(3xy^2)(xy)+(3xy^2)(-5y^2)\\&=3xy^2(3x^2+xy-5y^2)\end{aligned}$$

Verificamos la multiplicación,

$$3xy^2(3x^2+xy-5y^2)=9x^3y^2+3x^2y^3-15xy^4$$

En acción

Factoriza por completo cada una de las siguientes expresiones:

a) $5x-25=$

b) $6y^2+24=$

c) $-2a^4-14a^8=$

Factorización por agrupación

Al parecer, un polinomio como x^3+2x^2+3x+6 no tiene un factor común, pero si utilizamos la propiedad asociativa y después la distributiva, veremos que sí es posible factorizar. He aquí la forma de hacerlo.

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+3x+6 &= (x^3+2x^2)+(3x+6) && \text{Propiedad asociativa.}\\ &= x^2(x+2)+3(x+2) && \text{Factor común en cada binomio.}\\ &= (x+2)(x^2+3) && \text{Propiedad distributiva con el MFC.} \end{aligned}$$

Ejemplo

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

Factoriza $2a^2+6ab+(-3ab)-9b^2$.

Solución

$$\begin{aligned} 2a^2+6ab+(-3ab)-9b^2 &= \left(2a^2+6ab\right)+\left(-3ab-9b^2\right) && \text{Propiedad asociativa.}\\ &= 2a(a+3b)-3b(a+3b) && \text{Factor común en cada binomio.}\\ &= (a+3b)(2a-3b) && \text{Propiedad distributiva con el MFC.} \end{aligned}$$

En acción

Factoriza por agrupación las siguientes expresiones:

a) $u^3+2u^2+u+2=$

b) $x^3-3x^2+x-3=$

c) $4y^3+6y^2+2y+3=$

(Continúa)

(*Continuación*)

d) La expresión $A = \pi rh + 2\pi r^2$ representa el área superficial de un cilindro cerrado (**Figura 5.10**), donde h es la altura y r es el radio del cilindro. Factoriza la expresión $A = \pi rh + 2\pi r^2$.

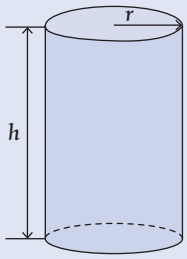


Figura 5.10 Cilindro cerrado.

e) El área de un trapecio (**Figura 5.11**) está dada por $A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$, donde h es la altura del trapecio, y b_1 y b_2 las longitudes de las bases. Factoriza $A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h$.

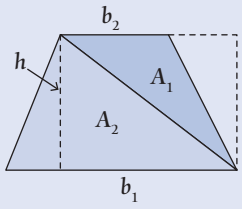
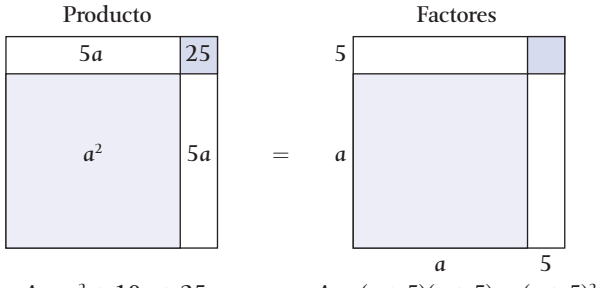


Figura 5.11 Trapecio.

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

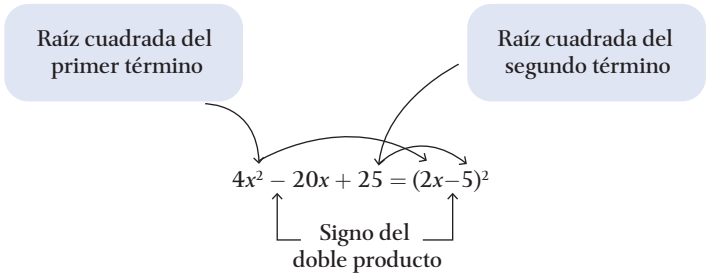
Observa los dos cuadrados de la figura siguiente y fíjate que si bien el área está expresada en dos formas diferentes, ésta es exactamente la misma.



El modelo geométrico anterior nos indica que:

$$a^2 + 10a + 5 = (a+5)^2$$

y que la factorización de un trinomio cuadrado perfecto se puede obtener de la siguiente manera:



Ejemplo

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

¿Cuáles son los factores de un trinomio cuadrado perfecto?

a) $x^2+2xy+4y^2=\left(\underbrace{x}_{\text{Raíz de } x^2}+\underbrace{2y}_{\text{Raíz de } 4y^2}\right)^2$

b) $9m^2+12mn+4n^2=\left(\underbrace{3m}_{\text{Raíz de } 9m^2}+\underbrace{2n}_{\text{Raíz de } 4n^2}\right)^2$

En acción

Factoriza cada uno de los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

a) $a^2-6a+9=$

b) $u^2+4u+4=$

c) $b^4-2b^2+1=$

d) $9x^2+42x+49=$

e) La ecuación de costo $C(x)$ (que se lee C de x) para la producción de x artículos está dada por $C(x)=x^2+8x+16$. Factoriza esta expresión.

f) La función de demanda $D(x)$ para un producto viene dada por $D(x)=x^2-14x+49$. Factoriza la expresión.

Competencias a desarrollar

- **CG** 5.1
- **CG** 5.2
- **CDBM** 3

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2Hkb7yi

Actividad de aprendizaje 1

Analiza cada una de las situaciones que se presentan a continuación, en ellas tendrás que efectuar operaciones básicas con polinomios de una variable, productos notables y factorizaciones. Resuelve según corresponda. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. Resuelve las siguientes expresiones.

a) $(2x-3x^2-5)+(4x^2+3x)+(-2x^2+3x)=$

b) $\left(b^2-\frac{1}{2}b\right)+\left(\frac{1}{3}b^2-\frac{1}{4}b\right)+\left(-\frac{1}{4}b-2b^2\right)=$

c) $\left(\frac{1}{2}u^2-\frac{3}{4}u^2-\frac{2}{5}u\right)-\left(\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{4}u\right)=$

d) $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=$

e) $(p^2-6p+3)(p-2)=$

2. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(a+2b-3)(a+2b+3)=$

b) $(2u^n-7)(2u^n+7)=$

c) $\left(\frac{1}{2}y-3\right)\left(\frac{1}{2}y-2\right)=$

3. Factoriza por completo la siguiente expresión:

$5c^7-15c^6+10c^3-20c^2=$

4. Factoriza por agrupación la siguiente expresión:

$3a^4+12a^2+a^2+4=$

5. Factoriza el siguiente trinomio cuadrado perfecto:

$16x^2+40x+25=$

Actividad de aprendizaje 2

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CDBM 1
- CDBM 3

Utiliza la suma y resta de polinomios, productos notables, factorizaciones básicas (factor común, diferencia de cuadrados perfectos, productos de binomios y trinomios cuadrados perfectos) y sus combinaciones para obtener la solución a los problemas que a continuación se presentan. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. Encuentra la utilidad U en la venta de una torta en la cafetería de tu escuela si su costo es $C=2x+13$ y su precio de venta es $V=7x$.

(Continúa)

(Continuación)

2. Calcula el área del patio de tu escuela si éste es un rectángulo que mide x de ancho y $2x + 5$ de largo.

3. Factoriza la expresión $D(x) = x^2 - 7x + 12$, la cual *representa la demanda de boletos del cine de tu comunidad.*

Competencias a desarrollar

- **CG 5.1**
- **CG 5.2**
- **CG 8.2**
- **CDBM 1**
- **CDBM 3**

Actividad de aprendizaje 3

Formulen, en un equipo de cinco personas, tres problemas relacionados con su entorno. Resuélvanlos e interpreten las soluciones obtenidas, argumentándolas a partir del uso de las distintas formas de representación matemática vistos hasta este momento y entréguenlos a su profesor para que los revise. Escribe en tu cuaderno los problemas. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

Al finalizar la actividad, tomen un momento para reflexionar y socializar al interior del equipo, sobre cómo se sintieron al explicar o al dejar que otros de sus compañeros les explicara.

Sugerimos que trabajen sus soluciones en formato de video con ayuda de las herramientas de *PowToon* (http://bit.ly/2j7j4Ki) o *Wideo* (http://bit.ly/2uTTe7T), y suban el resultado a *YouTube* para compartirlo con su grupo y comentarlo en plenaria.

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En acción

Resuelve las situaciones que a continuación se te presentan.

1. Un fabricante de televisores desea que la pantalla rectangular tenga 7 pulgadas más de longitud que su altura, y que su diagonal sea 8 pulgadas más larga que la altura como se muestra en la **Figura 5.12.** ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la pantalla?

- Consulta acerca del **teorema de Pitágoras** y utilízalo para encontrar la respuesta.

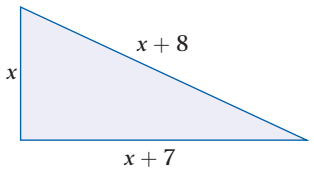


Figura 5.12 Diagonal de la pantalla.

- Con la ayuda de tu maestro, reflexiona sobre la obtención de la expresión $x^2 - 2x - 15 = 0$ e intenta factorizarla.

GLOSARIO

Teorema de Pitágoras. Establece que para todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

- ¿Qué significan los factores?

2. Se lanza hacia abajo un objeto con una velocidad (v_0) de 3 metros por segundo desde una altura h de 6 metros (**Figura 5.13**). Determina cuánto tardará en llegar al suelo. *Sugerencia*: utiliza la expresión $h = 3t^2 + v_0 t$.

- Sustituye v_0 por 3 metros por segundo y h por 6 metros. Comenta con tu profesor sobre esta sustitución. Explica.

- Ordena la expresión $6 = 3t^2 + 3t$ e iguala a cero. Después, factoriza la nueva expresión y reflexiona acerca de los factores de esta solución.

- ¿Por qué $3t^2 + 3t - 6 = 0$ nos da la solución?

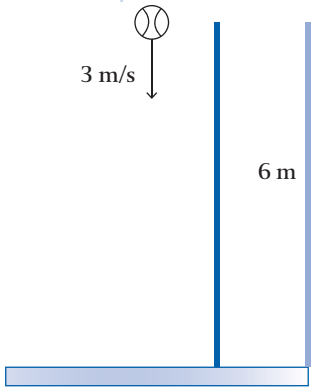


Figura 5.13 Lanzamiento de un objeto.

Para factorizar un polinomio cuadrático de la forma $x^2 + bx + c$, es necesario observar que:

$$(x+m)(x+n) = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{Producto}\\ \text{del común}}} + \underbrace{(m+n)x}_{\substack{\text{Suma de los no}\\ \text{comunes por el común}}} + \underbrace{mn}_{\substack{\text{Producto de}\\ \text{los no comunes}}}$$

donde m y n son números tales que $(m + n)$ y $mn = c$.

A continuación se presentan casos de factores de $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

Factoriza $x^2 + 10x + 24$.

Solución

Sabemos que $mn = 24$ y $m + n = 10$; por tanto, buscamos por ensayo y error factores de 24 cuya suma sea 10. La tabla siguiente muestra los factores correspondientes.

m	n	Suma
24	1	25
12	2	14

(Continúa)

(Continuación)

8	3	11
6	4	10

De esta manera, vemos que $m = 6$ y $n = 4$ son los factores de 24 cuya suma es 10. Por tanto:

$$x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$$

En acción

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

1. Factoriza cada uno de los trinomios siguientes:

Trinomio	Factores
a) $x^2 - 11x + 30$	
b) $x^2 + 44x + 363$	
c) $y^2 + 4y + 3$	
d) $y^2 - 15y + 56$	

2. La pantalla de un televisor mide 3 pulgadas más de longitud que de altura. Si la longitud diagonal de la pantalla mide 3 pulgadas más que su longitud, ¿cuál es la medida de la diagonal de esta pantalla?

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la *Calculadora de factorización* (https://bit.ly/2F6VYhN), utilízala para cada actividad de este bloque.

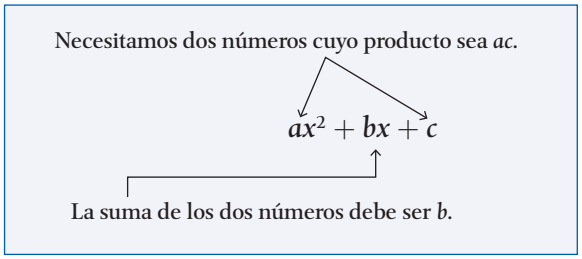
WEB

Consolida lo aprendido hasta el momento realizando lo siguiente: **1.** Revisa y trabaja con las actividades del recurso *Operaciones con polinomios* (http://bit.ly/2vEPG9Y) y *Productos notables y factorización* (http://bit.ly/2y2lB3Z); **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos elijan uno de los temas estudiados hasta el momento, repásenlo y redacten un resumen; **3.** Con las notas de su resumen, creen un video y una serie de 5 ejercicios interactivos (usen *ProProfs* [http://bit.ly/2Jpy0C0] o *QuizWorks* [https://bit.ly/2ErnXbC]); **4.** Presenten su video ante el grupo y compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Un polinomio cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 1$, es factorizable si existen dos enteros con producto ac y la suma de los dos números es b.

Un diagrama puede ayudarte a comprender mejor esta prueba.



Ejemplo

Analiza detalladamente el proceso de solución para que después seas capaz de responder los ejercicios que se planteen.

Factoriza $6x^2 + 13x + 5$.

Solución

En este caso $ac = 30$ y los factores de 30 deben sumar 13, es decir, $a + c = 13$ de manera que:

a	c	ac	$a + c = b$
10	3	(10)(3) =30	10 + 3 =13

Por tanto, $6x^2 + 13x + 5$ es factorizable y los números que nos sirven son 10 y 3 porque sumados dan 13. De tal modo que:

$$6x^2 + 13x + 5 = \underbrace{6x^2 + 10x}_{\text{Se agrupan}} \quad \underbrace{+3x + 5}_{\text{Se agrupan}} \qquad \text{Agrupamos términos en pares.}$$

$$= 2x(3x + 5) + 1(3x + 5) \qquad \text{Factorizamos.}$$

$$= (3x + 5)(2x + 1)$$

Cuando no se encuentran dos factores cuyo producto sea ac y cuya suma $a + c$ sea b, *el trinomio no es factorizable.*

En acción

Factoriza, siempre que sea posible, cada una de las siguientes expresiones:

Trinomio	a	c	ac	$a + c = b$	Factores
a) $6x^2 - 7x - 3$					
b) $5 + 11x - 12x^2$					
c) $7a^2 - 44a - 35$					
d) $6y^2 + 7y + 2$					

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CDBM 3

Actividad de aprendizaje 4

Analiza las situaciones que se presentan a continuación y escribe los trinomios de la forma $ax^2+bx+cyx^2+bx+c$, como en un producto de factores: enteros y no enteros. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. $6y^4+5y^2-6$

2. $5m^2+13m-6$

3. $15+2b^2-8b^4$

4. $14x^4-45x^2-14$

5. $10a^8+29a^4+10$

6. $3x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{8}$

7. $\frac{3}{25}x^2-\frac{3}{20}x-\frac{1}{12}$

Factorización de polinomios que requieren combinar técnicas

A veces, al factorizar un polinomio, es posible factorizar de nuevo la expresión resultante, lo cual permite simplificar aún más la expresión. A este proceso de factorizar un polinomio hasta que ya no sea posible se le llama **factorización completa**.

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

1. Factoriza $3x^8 - 27x^2$.

Solución

$$3x^4 - 27x^2 = 3x^2\left(x^2 - 9\right) \qquad \text{Factor común } 3x^2.$$
$$= 3x^2(x+3)(x-3) \qquad \text{Factorización de } x^2 - 9 \text{ como } (x+3)(x-3).$$

2. Factoriza $2x^3 + 6x^2 - 8x$.

Solución

$$2x^3 + 6x^2 - 8x = 2x\left(x^2 + 3x - 4\right) \qquad \text{Factor común } 2x.$$
$$= 2x(x+4)(x-1) \qquad \text{Factorización de } x^2 + 3x - 4 \text{ como } (x+4)(x-1).$$

WEB

La película estadounidense llamada *Cube* es un acertijo sobre el uso de los factores. Si no te da miedo el suspenso ni te asusta la sangre, puedes verla y poner mucha atención a la solución del problema que presentan los protagonistas. Comparte con tus compañeros tus conclusiones.

Actividad de aprendizaje 5

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CG 8.2
- CDBM 1
- CDBM 3

Analiza las situaciones que se presentan a continuación, aplica tus aprendizajes sobre factorización y resuelve según corresponda. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. Utiliza la técnica más apropiada para factorizar las situaciones siguientes.

Expresión	Factores
a) $3m^4 - 243$	
b) $x^3 - 3x^2 - 28x$	
c) $3m^3 - 3m$	
d) $y^4 - 3y^2 - 4$	
e) $4a^5 + 4a^3 + 4a$	
f) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$	
g) $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{9}$	

2. El cambio de **energía cinética** de un móvil de masa m con velocidad inicial v_1 y velocidad final v_2 está dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

GLOSARIO

Energía cinética. Es el tipo de energía generada por el movimiento de un objeto.

(Continúa)

(Continuación)

Factoriza esta expresión.

3. ¿Qué energía cinética alcanza desde el reposo un crucero que pesa 151 400 toneladas (1 tonelada = 1 000 kg) hasta llegar a una velocidad de 41.8 km/h?

Haz equipo con un compañero y propongan tres actividades similares, interactivas, en *ProProfs* (http://bit.ly/2GVFy1K), que podrán compartir con otros compañeros para que las resuelvan y evalúen. Si requieren un tutorial para usar *ProProfs*, les sugerimos este: https://bit.ly/2F4yGt2.

Fracciones algebraicas

¿Cómo calculas en cuántas partes dividirás tu pastel de cumpleaños? ¿Por qué son tan importantes las divisiones de un pastel de cumpleaños? ¿Qué pasa si no se hace correctamente?

Cuando tratamos con el cociente de dos expresiones algebraicas, estamos trabajando con una **expresión fraccionaria** en la que el valor del denominador no es cero.

Si el numerador y el denominador de la fracción son polinomios, la fracción se llama **expresión racional**. Por ejemplo:

$$\frac{5x^3 - 10x + 25}{x - 3}$$

Observa que para que nuestra expresión racional tenga sentido, debemos considerar valores para el denominador en los que $x \neq 3$. (*Recuerda que el denominador cero no está definido.*)

Para simplificar expresiones racionales es conveniente que tanto el numerador como el denominador tengan factores comunes; por tanto, utilizaremos la propiedad básica siguiente:

$$\frac{a\not{c}}{b\not{c}} = \frac{a}{b}$$

Ejemplos

Observa el proceso de solución, éste podría ayudarte a resolver problemas similares.

Simplifica en cada ejercicio las expresiones racionales.

1. $\dfrac{9xy}{3ax^2 + 3x^3}$

Solución

$$\frac{9xy}{3ax^2+3x^3}=\frac{3\cdot 3x\cdot y}{3\cdot x^2\ (a\ +\ x)}$$
$$=\frac{3y}{x(a+x)}$$

2. $\dfrac{16-a^2}{a^2+8a+16}$

Solución

$$\frac{16-a^2}{a^2+8a+16}=\frac{(4+a)(4-a)}{(a+4)(a+4)}$$
$$=\frac{4-a}{4+a}$$

3. $\dfrac{x^6-25x^3-54}{x^6-729}$

Solución

$$\frac{x^6-25x^3-54}{x^6-729}=\frac{(x^3+2)(x^3-27)}{(x^3+27)(x^3-27)}$$
$$=\frac{x^3+2}{x^3+27}$$

4. Aplicación. Una compañía estima que el costo en dólares de producir x artículos es:

$$C(x)=2\,600+x+0.0025x^2$$

Encuentra el costo promedio de producir 325 artículos.

Solución

Llamemos $c(x)$ al costo promedio; de esta forma:

$$c(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{2\,600+x+0.0025x^2}{x}=\frac{2\,600}{x}+1+0.0025x$$

Para producir 325 artículos, la compañía puede calcular su costo promedio como:

$$c(x)=\frac{2\,600}{325}+1+0.0025(325)=9.81 \text{ dólares por artículo}$$

En acción

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

Expresión	Resultado
a) $\dfrac{24x^5}{x^3}=$	
b) $-\dfrac{36x^4}{48x^3}=$	

(Continuación)

c) $\dfrac{4x^4-4x^2}{4x^2}=$	
d) $\dfrac{x^2+3x-4}{7x^2-14x+7}=$	
e) $\dfrac{2x^2+2x-12}{x^2-4}=$	
f) $\dfrac{10x^3-5x^2-30x}{2x^2-7x+6}=$	

División de polinomios

Polinomio entre monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio, expresando el resultado como una serie de divisiones de monomios.

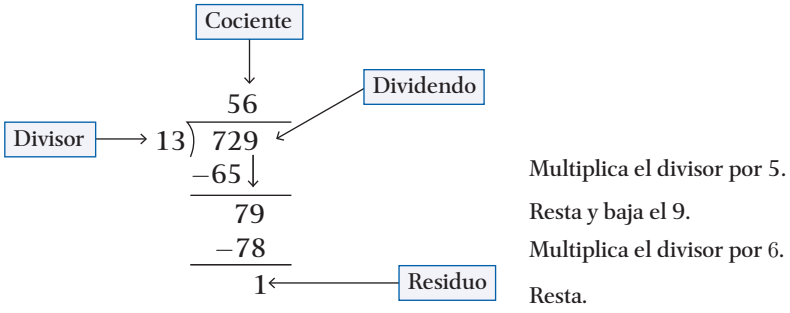
Ejemplo

Para resolver la división de polinomios es necesario separar la expresión en cada uno de los monomios presentes y realizar las operaciones correspondientes, es decir:

$$\begin{aligned}\left(12x^5-8x^4+3x^3\right)\div\left(4x^3\right)&=\frac{12x^5-8x^4+3x^3}{4x^3}\\&=\frac{12x^5}{4x^3}-\frac{8x^4}{4x^3}+\frac{3x^3}{4x^3}\\&=3x^2-2x+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Polinomio entre polinomio

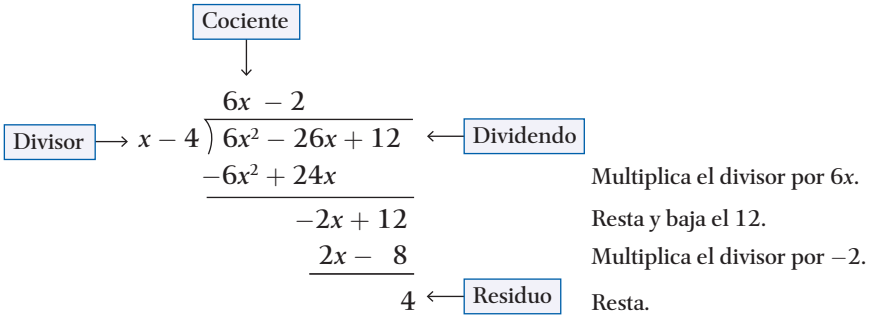
En la división de un polinomio entre otro procedemos de manera muy semejante a la división larga en aritmética. Recordemos cómo es este procedimiento mediante el siguiente esquema:



La división anterior se puede expresar también como:

$$\frac{729}{13}=56+\frac{1}{13}$$

Con el siguiente esquema vamos a recordar la división larga de un polinomio entre otro polinomio.
Primero ordenamos el dividendo y el divisor en forma descendente.



El resultado de la división anterior es:

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4} = 6x - 2 + \frac{4}{x - 4}$$

Multiplicando por $(x - 4)$ a ambos lados de la igualdad, la división se puede escribir como:

$$6x^2 - 26x + 12 = (6x - 2)(x - 4) + 4$$

De hecho, puedes multiplicar el lado derecho de la igualdad para comprobar la división.

Pon en acción tus conocimientos y realiza lo que se pide a continuación.

1. Realiza las divisiones siguientes:

En acción

División	Resultado
a) $\frac{54x^4 - 39x^3 + 15x^2}{9x^2} =$	
b) $\frac{40a^4 - 10a^5 + 16a^7}{8a^2} =$	
c) $\frac{-21x^2 - 35x - 70}{35x} =$	

2. Realiza las divisiones de polinomios siguientes:

a) $\left(15a^2 - a - 28\right) \div (3a + 4) =$

(Continúa)

(Continuación)

b) $\left(x^3+48x-64-12x^2\right)\div\left(x^2+16-8x\right)=$

c) $\left(15m^3-34m^2+9m+10\right)\div(3m-5)=$

Actividad de aprendizaje 6

Competencias a desarrollar

- **CG 5.1**
- **CG 5.2**
- **CG 8.2**
- **CDBM 1**
- **CDBM 3**

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2IpRgOW

Conformados en equipos de trabajo de cinco estudiantes, resuelvan los siguientes problemas. Interpreten y argumenten las soluciones obtenidas, utilizando distintas formas de representación matemática. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. Juan se dedica a elaborar esferas navideñas, donde el costo de producir x unidades es $C(x)=42.8x-0.004x^2$. Determina el costo promedio para un nivel de producción de 2 000 unidades.

2. Una compañía de celulares gasta en publicidad de acuerdo con el modelo que viene dado por $N(t)=15+2.5t-0.065t^2$ en miles de pesos. Por otro lado, el gasto en la publicidad local es conforme al modelo $L(t)=10+2.5t-0.085t^2$ en miles de pesos, donde t es el número de años después de 2010.

a) ¿Qué cantidad se gastó en publicidad nacional en 2010 ($t=0$)?

b) ¿Qué cantidad se gastó en publicidad local en 2010 ($t=0$)?

c) ¿Qué significa la expresión racional $\dfrac{N(t)}{L(t)}$?

3. Al adquirir $2x + 3$ artículos se paga un importe de $10x^2 + 29x + 21$ pesos, ¿cuál es el precio unitario de los artículos?

4. En el auditorio de una escuela se presenta una obra de teatro para maestros y alumnos. Si en la escuela hay $4x^3$ maestros y $2x^2$ alumnos, y el auditorio solamente tiene capacidad para $2x^2$ personas, ¿cuántas presentaciones se deben realizar para que todo el alumnado y todos los profesores la presencien?

5. Resuelve las siguientes divisiones de un polinomio entre un monomio.

a) $\dfrac{2x^3 - 30x^2 + 9x - 3}{6x}$

b) $\dfrac{4a^5 - 5a^3 + 9a}{6a}$

6. Resuelve las siguientes divisiones de un polinomio entre un polinomio.

a) $\dfrac{15x^3 - 36x^2 + 17x - 2}{5x - 2}$

(*Continúa*)

(Continuación)

b) $\dfrac{8a^3-1}{4a^2+2a+1}$

Al finalizar la actividad, tomen un momento para reflexionar y socializar al interior del equipo, sobre cómo se sintieron al explicar o al dejar que otros de sus compañeros les explicara.

WEB

Consolida lo aprendido hasta este momento realizando lo siguiente: **1.** Revisa y trabaja con las actividades de los recursos *Simplificando expresiones racionales* (http://bit.ly/2vIaJsf) y *Factorización de un trinomio cuadrado perfecto y de trinomios de segundo grado* (http://bit.ly/2HQurEv); **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos elijan uno de los temas estudiados en el bloque, repásenlo y redacten un resumen; **3.** Con las notas de su resumen, creen un video y una serie de 5 ejercicios interactivos (*ProProfs* [http://bit.ly/2GVFy1K] o *QuizWorks* [https://bit.ly/2ErnXbC]); **4.** Presenten su video ante el grupo y compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Conexiones

Las áreas del conocimiento se vinculan para comprender, interpretar y resolver los fenómenos que ocurren en tu vida cotidiana. De igual forma, las asignaturas que abordad a lo largo de este semestre se relacionan a través de puntos de encuentro donde unas coadyuvan a otras. Tal es el caso de Matemáticas 1, Química 1 y Taller de lectura y redacción 1. Para comprender mejor este vínculo investiga cómo se relacionan los polinomios con los diferentes tipos de orbitales atómicos. Elabora un resumen con tus hallazgos entrégaselo a tu profesor.

Habilidad matemática

1. La simplificación de la fracción $\dfrac{3x^3-6x^2+3x}{3x^2-3x}$ es igual a:

a) 1 b) $(x+2)$ c) $(x+1)$ d) $(x-1)$

2. ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde al siguiente enunciado?
El cociente de la suma de dos números al cuadrado entre la diferencia de dichos números.

a) $\dfrac{(c+d)^2}{(c-d)^2}$ b) $\dfrac{(c+d)^2}{c-d}$ c) $\dfrac{c^2-d^2}{c-d}$ d) $\dfrac{c^2-d^2}{c-d^2}$

3. ¿Cuál es la factorización del siguiente polinomio?

$$x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 65x + 25$$

a) $(x^2 + 3x + 1)(x - 5)^2$
b) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 10x + 25)$
c) $(x - 5)^4$
d) $(x^2 + 3x + 1)(x - 5)^2$

4. ¿Cuál es el resultado del siguiente producto de binomios?

$$(x + 3)(x - 12)(x + 1)$$

a) $x^3 + 8x^2 + 45x - 36$
b) $x^3 - 8x^2 - 45x - 36$
c) $x^3 + 8x^2 + 45x + 36$
d) $x^3 - 8x^2 - 45x + 36$

SOMOS IGUALES

Matilde Montoya Lafragua tuvo desde pequeña una personalidad deseosa de aprender, desafortunadamente en la época que le tocó vivir la mujer debía estar en casa y no interesarse por estudiar demasiado, así que encontró muchas trabas para poder entrar a estudiar medicina hasta que, desesperada, le escribió al entonces presidente de la república Porfirio Díaz quien la apoyó con un decreto que autorizaba que se graduaran "mujeres médicas", logrando así ser la primera médica mexicana. ¿Quieres saber más? Lee su biografía en https://bit.ly/2FvM9ir. Analiza la información e identifica la importancia de lo que significa la equidad de género. Reúnete en equipo de tres integrantes y compartan los principales elementos que identifican el proceso que vivió Matilde Montoya, escucha, respeta y valora las diferentes opiniones de tus compañeros.

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

1. ¿Qué es una igualdad y cuáles son sus propiedades?

2. ¿Cuál es la diferencia entre un polinomio y un producto notable?

3. ¿Cuál es la relación entre los coeficientes del binomio de Newton y los del triángulo de Pascal?

4. ¿Qué entiendes por factorización?

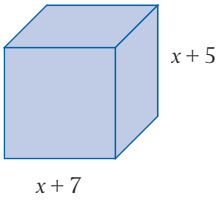
(Continúa)

(Continuación)

Matemáticas gráficas

5. Determina el área del rectángulo que se muestra a continuación.

6. Calcula el área de la base y la medida de los lados de la siguiente caja que tiene un volumen de $x^3+15x^2+71x+105$.



Ejercicios numéricos

7. Realiza las siguientes multiplicaciones de polinomios.

a) $(x+2)(x-5)(x-15)$

b) $\left(2x^2-5x+6\right)\left(3x^4-5x^3-6x^2+4x-3\right)$

c) $\left(a^n b-a^{n-1}b^2+2an^{n-2}b^3-a^{n-3}b^4\right)\left(a^n b^2-a^{n-2}b^4\right)$

d) $\left(\frac{2}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2y-\frac{7}{9}x\,y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{2}{3}x^2\,y^3\right)$

8. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $\dfrac{y^5+2y^4-5y^3+1}{y+1}$

b) $\dfrac{a^5+a^4+a^3+3a^2+10a+6}{a^2+a+2}$

c) $\dfrac{2ax^5-5ax^4+6ax^3+4ax^2-11ax+4a}{2x^2-3x+1}$

d) $\dfrac{6x^5+x^4+4x^2-7x+1}{2x^2+x-3}$

9. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $100a^2b^3c-150ab^2c^2+50ab^3c^3-200abc^2$

b) $\sqrt[3]{m^2}-6\sqrt[3]{m}+9$

c) $\dfrac{1}{24}x^2-\dfrac{13}{12}xy+\dfrac{1}{6}y^2$

d) $x^3-16x^2+71x-56$

10. Halla el desarrollo de los siguientes binomios utilizando el binomio de Newton.

a) $\left(5x-y^2\right)^5$

b) $\left(x^2-\dfrac{a}{2}\right)^6$

c) $\left(x^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}\right)^9$

d) $(x-5)^7$

(*Continúa*)

(Continuación)

11. Construye el triángulo de Pascal para $n=12$ y obtén el desarrollo de los siguientes binomios.

a) $(3+5)^4$ b) $(a+b)^{11}$ c) $(r+3j)^8$ d) $(4g+2e)^{11}$

Problemas de aplicación

12. ¿Cuánto miden los lados de un cubo cuyo volumen es $x^3+6x^2+12x+8$?

13. El área de un terreno es $x^2+13x+40$ y su largo es $x+8$, ¿cuánto mide su ancho?

14. Demuestra que, si el cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de los cuadrados de dichos números, entonces, alguno de estos números es cero.

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este quinto bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Utilizo el lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverante en la búsqueda de soluciones.				
Propongo procesos de solución identificando posibles errores.				
Aplico el álgebra en mi vida cotidiana favoreciendo el pensamiento crítico.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.

(*Continúa*)

(Continuación)

Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 337 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Analiza cada una de las situaciones que se presentan a continuación, en ellas tendrás que efectuar operaciones básicas con polinomios de una variable, productos notables y factorizaciones.	Ejercicios resueltos.	Pág. 164.	Lista de cotejo.
Utiliza la suma y resta de polinomios, productos notables, factorizaciones básicas (factor común, diferencia de cuadrados perfectos, productos de binomios y trinomios cuadrados perfectos) y sus combinaciones para obtener la solución a los problemas que a continuación se presentan.	Problemas resueltos.	Pág. 165.	Rúbrica.
Formulen, en un equipo de cinco personas, tres problemas relacionados con su entorno. Resuélvanlos e interpreten las soluciones obtenidas, argumentándolas a partir del uso de las distintas formas de representación matemática vistos hasta este momento y entréguenlos a su profesor para que los revise.	Lista de problemas.	Pág. 166.	Guía de observación.
Analiza las situaciones que se presentan a continuación y escribe los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ y $x^2 + bx + c$, como en un producto de factores: enteros y no enteros.	Ejercicios resueltos.	Pág. 170.	Lista de cotejo.
Analiza las situaciones que se presentan a continuación, aplica tus aprendizajes sobre factorización y resuelve según corresponda.	Ejercicios resueltos.	Pág. 171.	Lista de cotejo.
Conformados en equipos de trabajo de cinco estudiantes, resuelvan los siguientes problemas. Interpreten y argumenten las soluciones obtenidas, utilizando distintas formas de representación matemática.	Problemas resueltos.	Pág. 176.	Rúbrica.

BLOQUE 6

Ecuaciones lineales

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES	
Interdisciplinariedad	**Ejes transversales**
Química 1 Taller de Lectura y Redacción 1 Informática 1 Ética 1	Eje transversal Social Eje transversal Ambiental Eje transversal de la Salud Eje transversal de Habilidades lectoras

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
14 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Resuelve modelos lineales que representan fenómenos de la vida cotidiana.

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 1.1 Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
CG 4.1 Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG 5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
CG 6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
CDBM 4 Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

CONOCIMIENTOS

- Ecuaciones lineales.
  - Una variable.
  - Dos variables.
  - Tres variables.

ACTITUDES

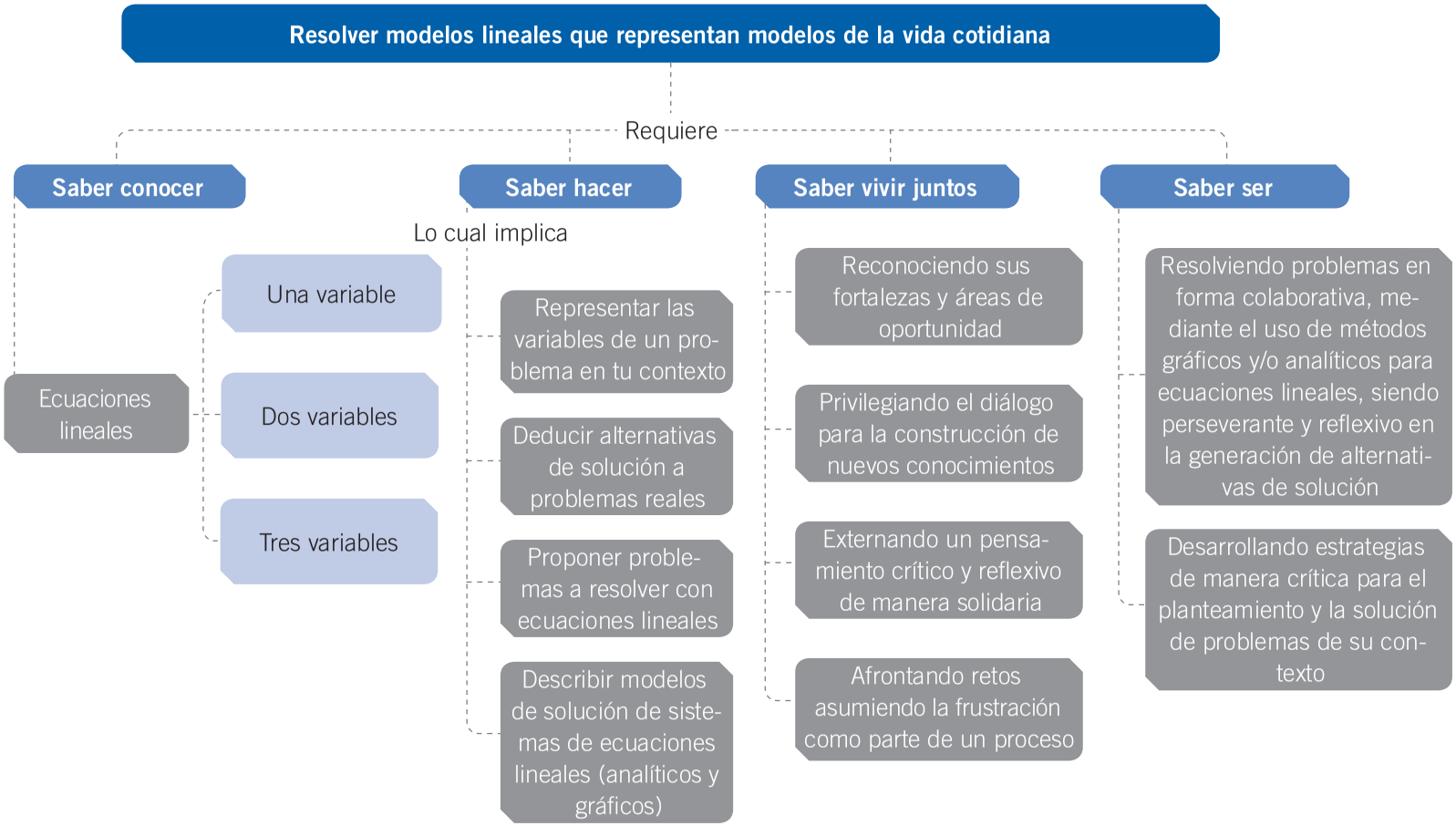
- Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad.
- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos.
- Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria.
- Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.

HABILIDADES

- Representa las variables de un problema en su contexto.
- Deduce alternativas de solución a problemas reales.
- Propone problemas a resolver con ecuaciones lineales.
- Describe modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos).

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Resuelve problemas de forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución.
- Desarrolla estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto.


Resolver modelos lineales que representan modelos de la vida cotidiana
Requiere
Saber conocer
Saber hacer
Saber vivir juntos
Saber ser
Lo cual implica
Ecuaciones lineales
Una variable
Dos variables
Tres variables
Representar las variables de un problema en tu contexto
Deducir alternativas de solución a problemas reales
Proponer problemas a resolver con ecuaciones lineales
Describir modelos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (analíticos y gráficos)
Reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad
Privilegiando el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos
Externando un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria
Afrontando retos asumiendo la frustración como parte de un proceso
Resolviendo problemas en forma colaborativa, mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución
Desarrollando estrategias de manera crítica para el planteamiento y la solución de problemas de su contexto

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. A la solución de una ecuación también se le llama _____.

a) raíz
b) operación
c) linealidad
d) intersección

2. ¿Qué expresión representa el costo (y) de la renta de un automóvil, cuya renta por día es de $250 más $4 por kilómetro recorrido (x)?

a) $y = 250 - 4x$
b) $y = 250 + 4x$
c) $y = 4x - 250$
d) $y = -250 - 4x$

3. La solución de las ecuaciones $x + y = 3$ y $x - y = 1$ es _____.

a) (2,3)
b) (2,1)
c) (2,−3)
d) (−2,1)

4. ¿Cuántas rectas representa un sistema de ecuaciones simultáneas de 3 por 3?

a) 2
b) 4
c) 3
d) 5

5. Describe cómo es el comportamiento lineal de un proceso.

6. ¿Cuáles son los elementos de una ecuación lineal?

7. Describe con tus palabras algún método de solución de un sistema de ecuaciones 2 × 2.

8. Describe geométricamente qué representa la solución de un sistema de ecuaciones de 3 × 3.

Ecuaciones lineales

Vas a celebrar una fiesta y conoces cuánto cuesta una lata de refresco y una bolsa de botana, ¿cómo determinas el precio del total de latas y bolsas de botana que necesitas? Si llegan más invitados a la fiesta, ¿qué sucede con el cálculo anterior? ¿Cómo será el modelo matemático que te ayude a calcular el costo individual de una computadora y de un celular si conoces el precio total y sabes que el celular costó la mitad del costo de la computadora? ¿Qué elementos requieres conocer para dar solución a la pregunta anterior?

Una variable

En esta sección resolverás situaciones en las que se apliquen las ecuaciones lineales o de primer grado con una incógnita.

Ejemplo

En un anuncio (**Figura 6.1**) se menciona que se descuentan $40 del precio original de una lata de impermeabilizante y que ahora su precio es de $79.99. ¿Cuál era el precio anterior p de la lata?

Figura 6.1 Anuncio de impermeabilizante.

Solución

Puesto que el precio p se rebajó $40, entonces el nuevo precio es $p - \$40$. Como el nuevo precio es $79.99, tenemos que:

$$p - 40 = 79.99$$

Aplicando la propiedad aditiva de las igualdades, sumamos 40 en ambos lados de la igualdad y obtenemos el precio original p. De tal modo que:

$$p - 40 + 40 = 79.99 + 40$$
$$p = 119.99$$

Por tanto, el precio anterior de la lata de impermeabilizante era de $119.99.

Desde luego, el anterior es un ejemplo muy elemental de la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, pero es importante que te familiarices con su análisis y su operatividad para que tengas mejores resultados en su aplicación.

Una **ecuación** es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas son iguales, por ejemplo, en la situación anterior:

$$p - 40 = 79.99$$

es una *ecuación* y, como vimos, su solución simplemente expresa una relación de igualdad entre dos cantidades que son fáciles de calcular e ilustra el patrón de comportamiento de este tipo de relaciones.

La *mayor* parte de las ecuaciones que se estudian en álgebra contienen variables, las cuales generalmente son letras que representan cantidades numéricas. En las ecuaciones:

$$x(x-4) = x^2 - 4x \quad \text{y} \quad 2y + 3 = 7$$

las letras x y y son variables. En la expresión $x(x - 4) = x^2 - 4x$ estamos representando la propiedad distributiva de la multiplicación, y es verdadera para cualquier valor de x; en este caso, la ecuación recibe el nombre de **identidad**.

En el caso de $2y + 3 = 7$ existe un solo valor, $y = 2$, que hace que la igualdad sea verdadera y se llama **solución** o **raíz de la ecuación**.

Ecuaciones equivalentes

Cuando dos ecuaciones tienen las mismas soluciones, se dice que son **equivalentes**. Para encontrar su solución, intentamos una equivalencia más sencilla y que contenga la variable sola en uno de los lados del signo de igualdad (=). Además, es indispensable utilizar de forma adecuada las propiedades de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

1. Si $a = b$, entonces, $a + c = b + c$
2. Si $a = b$, entonces, $ac = bc$

Como sabemos, las propiedades de la igualdad establecen que, al resolver una ecuación, deben *efectuarse las mismas operaciones en ambos lados de la igualdad*. Por ejemplo, al resolver $3x + 5 = 26$, primero tenemos que sumar (-5) y luego multiplicar por $\frac{1}{3}$ en ambos lados de la igualdad. Es decir:

$$\begin{aligned} 3x + 5 + (-5) &= 26 + (-5) && \text{Sumamos } (-5). \\ 3x &= 21 \\ \frac{1}{3} \times 3x &= \frac{1}{3} \times 21 && \text{Multiplicamos por } \frac{1}{3}. \\ x &= 7. && \text{Simplificamos.} \end{aligned}$$

Para verificar si la solución es correcta, sustituimos en la ecuación el valor de $x = 7$, y la parte izquierda de la igualdad debe ser igual que la de la derecha. De tal forma que:

$$\begin{aligned} x &= 7 \\ &\downarrow \\ 3(7) + 5 &= 26 \\ 26 &= 26 \qquad \text{¡Verdadero!} \end{aligned}$$

Técnicas para resolver ecuaciones lineales

La clase más sencilla de ecuaciones son las **ecuaciones lineales** o **de primer grado**. Una ecuación lineal es de la forma $ax + b = 0$, donde a y b representan números reales, $a \neq 0$, y x es la incógnita que hay que definir.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Resuelve la ecuación $2x - 4 = 5x + 8$.

Solución

Hay que buscar una ecuación equivalente de forma que en un lado tenga los términos en x y del otro los valores constantes. Así:

(Continúa)

(Continuación)

$$
\begin{aligned}
2x-4 &= 5x+8 && \\
(2x-4)+4 &= (5x+8)+4 && \text{Suma 4 en ambos lados.}\\
2x &= 5x+12 && \text{Simplifica.}\\
2x-5x &= (5x+12)-5x && \text{Resta } 5x \text{ en ambos lados.}\\
-3x &= 12 && \text{Simplifica.}\\
\left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) &= (12)\left(-\frac{1}{3}\right) && \text{Multiplica por } -\frac{1}{3}.\\
x &= -4 && \text{Simplifica.}
\end{aligned}
$$

2. Resuelve la ecuación $5(x+2)=3(x+1)+9$.

Solución

A partir de la propiedad, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
5(x+2) &= 3(x+1)+9 && \\
5x+10 &= 3x+3+9 && \text{Propiedad distributiva.}\\
5x+10 &= 3x+12 && \text{Simplifica.}\\
5x+10-10 &= 3x+12-10 && \text{Resta 10 en ambos lados.}\\
5x &= 3x+2 && \text{Simplifica.}\\
5x-3x &= 3x-3x+2 && \text{Resta } 3x \text{ en ambos lados.}\\
2x &= 2 && \text{Simplifica.}\\
\frac{2x}{2} &= \frac{2}{2} && \text{Divide entre 2 en ambos lados.}\\
x &= 1 && \text{Simplifica.}
\end{aligned}
$$

Comprobación

$$
\begin{aligned}
x &= 1 && \\
&\downarrow && \\
3(1+2) &= 3(1+1)+9 && \\
5(3) &= 3(2)+9 && \\
15 &= 15 && \text{¡Verdadero!}
\end{aligned}
$$

En acción

Resuelve las siguientes ecuaciones:

Ecuación	Solución
a) $3x-12=0$	
b) $3x+4=x+10$	
c) $4u-7=6u+9$	
d) $5(4-3a)=7(3-4a)$	

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la "calculadora para la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita" (https://bit.ly/2KddDZc).

En acción

La actividad de investigación que se presenta a continuación, te servirá para trasladar a contextos más amplios. Recuerda que las matemáticas están relacionadas con la ciencia, tecnología y demás actividades que realiza el hombre ¡No pierdas la oportunidad de descubrirlo!

1. ¿Cuál es la función de una máquina trilladora de trigo?

2. ¿Qué importancia económica y alimenticia tiene la producción de trigo en nuestro país?

3. ¿Cuáles países son los mayores productores de trigo?

4. ¿De qué forma se relacionan las matemáticas con lo investigado?

Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Resuelve $\frac{3}{4}+\frac{x}{5}=1$.

Solución

Sabemos que para resolver es necesario despejar a la variable en cuestión, de tal forma que:

$$(20)\frac{3}{4}+(20)\frac{x}{5}=1(20)$$ Multiplica por el MCD = 20.

$$15+4x=20$$ Simplifica.

$$15-15+4x=20-15$$ Resta 15 en ambos lados.

$$4x=5$$ Simplifica.

$$\frac{4x}{4}=\frac{5}{4}$$ Divide entre 4 en ambos lados.

$$x=\frac{5}{4}$$ Simplifica.

(*Continúa*)

(Continuación)

El MCD de 4 y 5 es 20, porque:

$$\begin{array}{rr|l} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array} \qquad (2^2)(5) = 20$$

Comprobación

$$x = \frac{5}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{3}{4} + \frac{\frac{5}{4}}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} = 1 \qquad \text{¡Verdadero!}$$

En acción

Resuelve las siguientes ecuaciones:

Ecuación	Solución
a) $\frac{3x+5}{3} + \frac{x+3}{3} = 12$	
b) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 1$	

Aplicaciones de las ecuaciones lineales

Para dar solución a planteamientos como los anteriores es necesario conocer las aplicaciones del alcance de las ecuaciones lineales.

Considera el siguiente diagrama como un sistema de acceso a la resolución de problemas aplicados.

GLOSARIO

Ingreso bruto. Es el total cobrado por un individuo al realizar alguna actividad o trabajo. Cuando a esta cantidad se le restan impuestos u otras deducciones, se denomina ingreso neto.

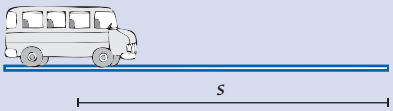
Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. José tiene un trabajo en el que gana $120 000 anuales, lo que incluye un bono de $10 000 al final del año. Si recibe un pago quincenal, ¿cuál es el **ingreso bruto** que recibe en cada cheque?

Modelo verbal Ingreso por año = 24 pagos + bono	**¿Qué conocemos?** Ingreso por año = \$120 000 Bono = \$10 000 **¿Qué queremos?** Cantidad en cada cheque = x
Ecuación $\$120\,000 = 24x + 10\,000$	**Solución** Utilizando las técnicas usadas en la resolución de ecuaciones tenemos que: $x = \dfrac{120\,000 - 10\,000}{24} = \$4\,583.33$ Así, el ingreso por cada cheque es de \$4 583.33.

2. Un autobús recorre la distancia de la Ciudad de México a Guadalajara a una velocidad promedio de 95 km/h, y de regreso viaja a una velocidad promedio de 90 km/h. Si todo el recorrido duró 12 horas, ¿cuál es la distancia de la Ciudad de México a Guadalajara?

Modelo verbal Tiempo total del viaje = Tiempo de ida + tiempo de regreso  	**¿Qué conocemos?** Velocidad promedio de ida = 95 km/h Velocidad promedio de regreso = 90 km/h Tiempo total del viaje = 12 h **¿Qué queremos?** Distancia de la Ciudad de México a Guadalajara = s
Ecuación La relación de velocidad es $v = \dfrac{s}{t}$, entonces, el tiempo t es $t = \dfrac{s}{v}$; el tiempo de ida es $t_i = \dfrac{s}{v_i}$ y el de regreso $t_r = \dfrac{s}{v_r}$. Por tanto: $\dfrac{s}{95} + \dfrac{s}{90} = 12$	**Solución** Resolvemos la ecuación anterior: $\dfrac{s}{95} + \dfrac{s}{90} = 12$ $90s + 95s = 102\,600$ $s = \dfrac{102\,600}{185} = 554.594 = 555$ La distancia de la Ciudad de México a Guadalajara es de 555 km aproximadamente.

Actividad de aprendizaje 1

Competencias a desarrollar

- CG 1.1
- CG 4.1
- CG 5.1
- CDBM 1
- CDBM 2

Las siguientes situaciones pueden representarse a través de una ecuación lineal con una variable; analízalas, resuélvelas según corresponda y completa los datos que faltan en la tabla para encontrar la solución. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Un anuncio tiene impresa su parte central con forma rectangular, que mide 100 por 140 centímetros, y está enmarcada con una banda de ancho constante. El perímetro del cartel es 1.5 veces el del área impresa. ¿Cuál es el ancho de la banda y cuáles son las dimensiones del cartel?

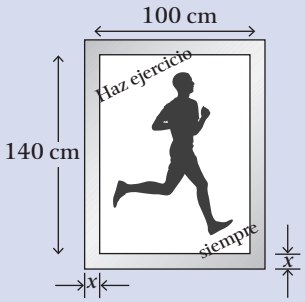
(*Continúa*)

(*Continuación*)

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2HnU5Dj

Modelo verbal o gráfico



¿Qué conocemos?

Perímetro del área impresa $= 2 \times 100 + 2 \times 140 = 480$
Perímetro del cartel $=$ 1.5 veces el perímetro del área impresa $= (1.5)(480) = 720$.

¿Qué queremos?

Ancho de la banda $= x$
Dimensiones del cartel
$(100 + 2x)(140 + 2x)$
Perímetro $= 2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$

Ecuación

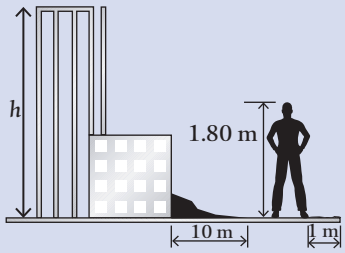
Solución

Ancho de la banda $=$

Dimensiones del cartel $=$

2. Se desea calcular la altura de un edificio. Para lograrlo, una persona de 1.80 metros mide la sombra que proyecta el edificio, la cual resulta ser de 10 metros, mientras que su propia sombra mide 1 metro. ¿Cuál es la altura h del edificio?

Modelo verbal o gráfico



¿Qué conocemos?

Sombra del edificio $=$

Sombra de la persona $=$

Altura de la persona $=$

¿Qué queremos?

Altura del edificio $= h$

Ecuación

Considerando las razones entre triángulos:

$$\frac{h}{10} = \frac{1.80}{1}$$

Solución

Altura del edificio $=$

GLOSARIO

Onza troy. Es una unidad de medida británica utilizada para medir la masa del oro u otros metales preciosos.

3. Con el propósito de elaborar oro blanco para las amalgamas dentales, los especialistas mezclan oro puro y platino. Supongamos que se desea elaborar 10 **onzas troy** de oro blanco para vender a \$415 la onza. Si el oro puro cuesta \$400 la onza y el platino a \$475 la onza, ¿qué cantidad de cada uno se debe mezclar?

Modelo verbal	**¿Qué conocemos?**
10 onzas de oro blanco a \$415 cada onza debe ser igual a la mezcla de una cantidad de oro puro a \$400 por onza más otra cantidad de platino a \$475 la onza.	Precio de 10 onzas de oro blanco = \$415 Precio de una onza de oro puro = \$400 Precio de una onza de platino = \$475 **¿Qué queremos?** Cantidad necesaria de oro puro = x Cantidad necesaria de platino = $10 - x$
Ecuación	**Solución**
Sugerencia: suma el costo de cada uno de los metales que van a componer la mezcla, y el total debe ser \$4 150.	

4. Saúl revisa su cuenta bancaria y observa que tiene \$12 378.00 después de que el banco le ha abonado sus respectivos intereses de 8%. ¿Cuánto tenía antes de que le depositaran los intereses?

5. La suma de 3 números consecutivos (n, $n + 1$, $n + 2$) es 156. ¿Cuáles son esos números? Plantea la forma de llegar al resultado.

6. Durante su carrera en ligas mayores, Hank Aaron conectó 31 cuadrangulares más que Babe Ruth (**Figura 6.2**). Juntos batearon 1 459. ¿Cuántos conectó Babe Ruth? Plantea la forma de llegar al resultado.

Figura 6.2 Babe Ruth.

7. ¿Cuántos litros de disolución de glicerina a 40% deben mezclarse con 10 litros de una disolución de glicerina a 80% para obtener una disolución a 65%? Observa la tabla adjunta.

Disolución de glicerina	Litros	%	Litros de la concentración
A	x	0.40	$0.40x$
B	10	0.80	8
Mezcla	$x + 10$	0.65	$0.65(x + 10)$

Competencias a desarrollar

- CG 1.1
- CG 4.1
- CG 6.4
- CDBM 4
- CDBM 5

Actividad de aprendizaje 2

Interpreta los resultados obtenidos al resolver las situaciones planteadas en la actividad anterior, mediante la solución de una ecuación lineal con una incógnita. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

WEB

Consolida lo aprendido hasta el momento realizando lo siguiente: **1.** Revisa y trabaja con las actividades del recurso *Ecuaciones de primer grado* (https://bit.ly/2lSIv4I) y *Resolución de ecuaciones* (https://bit.ly/2HVU46E); **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos elijan uno de los temas estudiados en el bloque, repásenlo y redacten un resumen; **3.** Con las notas de su resumen, creen un video y una serie de 5 ejercicios interactivos (usen *ProProfs* [https://bit.ly/2Jpy0C0] o *QuizWorks* [https://bit.ly/2ErnXbC]); **4.** Presenten su video ante el grupo y compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Dos variables

Sistema coordenado en el plano

Antes de ocuparnos de la relación entre la función lineal y la ecuación lineal, es conveniente entender la utilidad de la correspondencia entre puntos geométricos y números reales, puesto que esta relación nos permite comprender el concepto de sistema de **coordenadas rectangulares** o **cartesianas**.

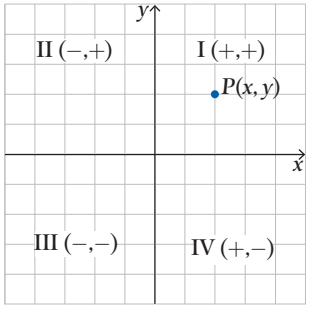


Figura 6.3 Cuadrantes del plano cartesiano.

El sistema coordenado es un sistema rectangular, llamado así en honor a su descubridor, René Descartes (1596-1650). Se trata de un sistema formado por dos ejes que se cortan perpendicularmente y que generan cuatro regiones, donde a cada punto le corresponde precisamente un par de números reales (**Figura 6.3**).

A continuación se muestran los elementos que componen este sistema:

- $P(x, y)$ es un punto geométrico, donde (x, y) representa un par de números reales.
- x se llama **abscisa** y y se llama **ordenada**; juntas, se llaman **coordenadas**.

Los cuadrantes se designan como I, II, III y IV y definen los signos de las coordenadas.

En acción

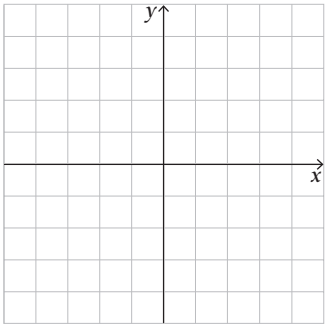
1. En la gráfica 1 localiza los puntos indicados a la izquierda, y en la gráfica 2 escribe las coordenadas de cada punto correspondiente a las coordenadas señaladas.

$P(4, 5)$

$Q(-4.5, 3.7)$

$R(-4, -4)$

$S\left(3, -\frac{4}{3}\right)$



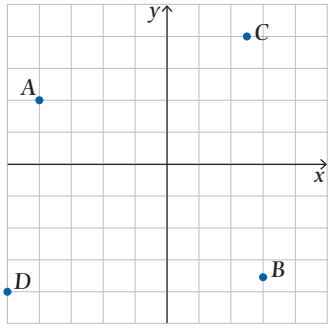
Gráfica 1

$A(\quad)$

$B(\quad)$

$C(\quad)$

$D(\quad)$

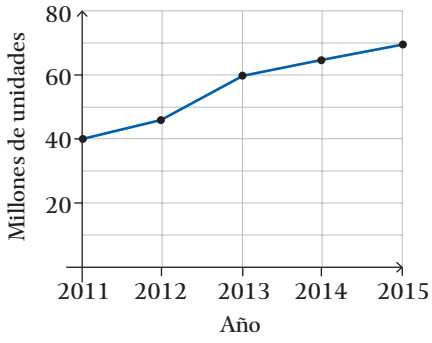


Gráfica 2

2. La gráfica siguiente indica las cifras de la venta de teléfonos inteligentes vendidos en México, en millones de unidades, para los años 2011 a 2015. Fíjate que en el eje horizontal está determinado el año y en el vertical el número de unidades vendidas. Escribe los siguientes pares ordenados:

a) La cantidad de teléfonos vendidos en 2014.

b) El año en que las ventas fueron de 71 millones unidades.

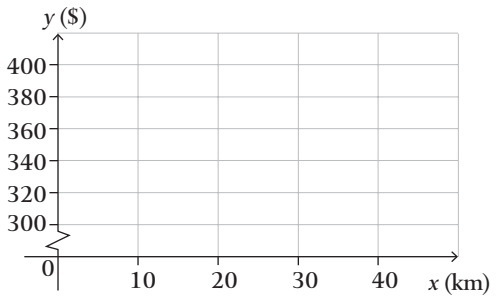


3. Ahora que conocemos el sistema de coordenadas en el plano, estamos en condiciones de relacionar la **ecuación lineal con su lugar geométrico**, es decir, con la **línea recta** o **función lineal**. Supongamos que deseamos rentar un automóvil que cuesta \$300 por día más \$2 por kilómetro recorrido. Así, la ecuación para el costo y basado en el número x de kilómetros recorridos es la siguiente:

$$\underbrace{y}_{\text{Costo}} = \underbrace{2x}_{\text{Costo por km}} + \underbrace{300}_{\text{Renta fija}}$$

Esta ecuación nos permite calcular los pares ordenados de la forma (x, y) dependiendo del número de kilómetros recorridos. Elabora la gráfica de los valores de la tabla y observa el lugar geométrico resultante al unir los puntos.

x (km)	0	10	20	30	40
y (\$)	300	320	340	360	380



Relación entre funciones y ecuaciones lineales

GLOSARIO

Geometría analítica. Es el área de las matemáticas que analiza los lugares geométricos a través de métodos analíticos.

Como te habrás dado cuenta, la gráfica es una **línea recta** y representa la ecuación **de primer grado** o **función lineal**. Su principal característica es que los puntos que la forman guardan entre sí una relación que no cambia. Esa relación se llama **pendiente**, se simboliza con la letra ***m*** y es el coeficiente del término en x cuando la y está despejada, como en este caso.

En cursos posteriores de **geometría analítica** estudiarás la relación constante llamada *pendiente*, pero por el momento es conveniente que te fijes que es una razón de cambio de las ordenadas entre las abscisas. Es decir, en nuestro ejemplo, el costo de $2 por kilómetro recorrido representa ese valor y significa que cada vez que recorremos un valor en x a la derecha, subimos 2 en y (**Figura 6.4**).

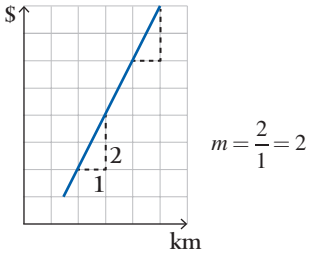


Figura 6.4 Razón de cambio de las ordenadas entre las abscisas.

Función lineal

Es una línea recta cuya ecuación tiene la forma:

$$y = mx + b$$

donde para cada valor de la variable independiente x, existe uno y sólo un valor para la variable dependiente y. La m es la pendiente de la recta y b es la intersección con el eje y.

Caso particular ($y = 0$)

En el caso particular en que $y = 0$, la función lineal $y = mx + b$ se convierte en la ecuación lineal $mx + b = 0$ que hemos estudiado en apartados anteriores. El valor de x obtenido en este caso particular representa la intersección de la recta con el eje x y se conoce como *solución* o raíz de la ecuación.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. **Intersecciones con los ejes**. Elabora la gráfica de la función lineal $y = 2x + 4$.

Solución

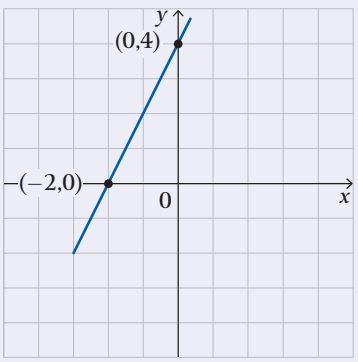
Intersección con el eje x ($y = 0$)

Resolvemos $y = 2x + 4$, por tanto, $x = \dfrac{-4}{2} = -2$, y el punto de intersección es $(-2,0)$.

Intersección con el eje y

Como $b = 4$, entonces el punto de intersección es $(0,4)$.

La gráfica correspondiente de la función lineal $y = 2x + 4$, es:

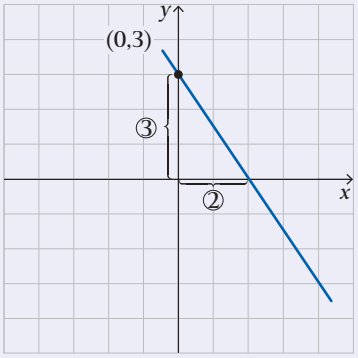


Raíz de la función lineal
Por cierto, si te fijas, cuando $y = 0$, nuestra ecuación se convierte en $2x + 4 = 0$ y $x = -2$. Este valor se llama la **raíz** de la ecuación.

2. Uso de la pendiente. Elabora la gráfica de la función lineal $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Solución
Recuerda que el coeficiente de x es la pendiente m. En esta situación, $m = -\frac{3}{2}$ y, cuando la pendiente de una recta es negativa, significa que está inclinada más de 90 grados.

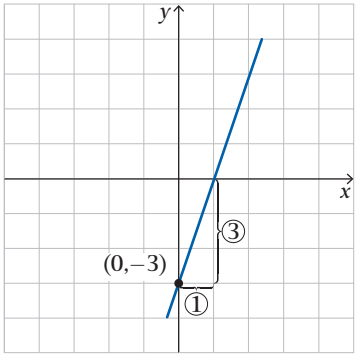
Como $b = 3$ la recta pasa por el punto $(0,3)$; a partir de este punto avanzamos 3 unidades verticalmente y 2 horizontalmente. La gráfica correspondiente es:

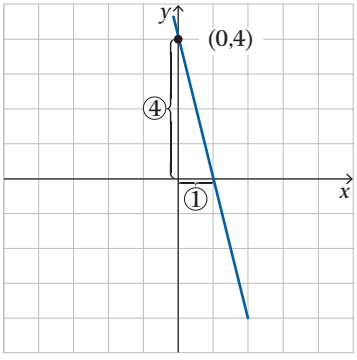


$y = -\frac{3}{2}x + 3$

En acción

1. Escribe la expresión algebraica de la función correspondiente debajo de cada gráfica.



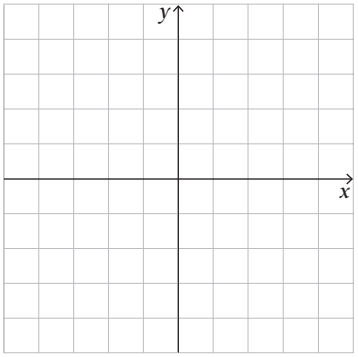


(Continúa)

(Continuación)

2. Elabora la gráfica de las función $y = 2x - 1$ atendiendo a las intersecciones con los ejes indicados.

x	0	
y		0



Uso de la calculadora graficadora y/o una computadora

Hoy en día existen múltiples *software* para elaborar las gráficas de las ecuaciones lineales. Algunos se pueden utilizar a través de tu computadora y otros por medio de calculadoras graficadoras.

En este apartado utilizaremos *GeoGebra*, un software libre y de bastante utilidad para las matemáticas abordadas durante el bachillerato.

GeoGebra

GeoGebra es un *software* educativo interactivo de matemáticas creado por un equipo internacional de desarrolladores bajo la autoría de Marcus y Judith Hohenwarter, que reúne simultáneamente la geometría, el álgebra y el cálculo.

Vistas múltiples de *GeoGebra*

La pantalla de inicio de *GeoGebra* muestra tres diferentes perspectivas de cada objeto matemático: una *vista gráfica*, una numérica y una *hoja de cálculo* principalmente, así como una barra de entrada, menús y herramientas (**Figura 6.5**).

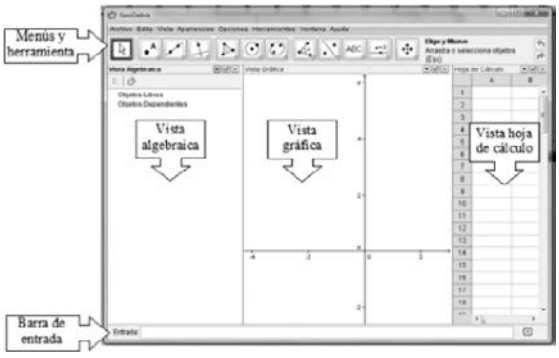


Figura 6.5 Pantalla inicial de *GeoGebra*.

La parte central, que contiene las vistas *algebraica*, *gráfica* y *hoja de cálculo*, permite visualizar la representación de un objeto en tres formas diferentes y que actúan interactivamente.

Las opciones de los **menús** y **las herramientas** (**Figura 6.6**) que se encuentran en la parte superior se despliegan al hacer un clic sobre ellos.

Figura 6.6 Opciones de herramientas.

La vista gráfica permite representar directamente objetos geométricos eligiendo con el ratón la herramienta deseada. Los objetos geométricos a su vez tendrán su equivalente en la vista algebraica.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Una superficie rectangular tiene de largo 1.5 veces de su ancho. Si su perímetro es de 60 cm. Utiliza el *software GeoGebra* para encontrar las dimensiones del rectángulo.

Solución

Llamemos x al ancho y $1.5x$ al largo, por tanto:

$$2x + 2(1.5x) = 60$$
$$5x = 60$$
$$5x - 60 = 0$$

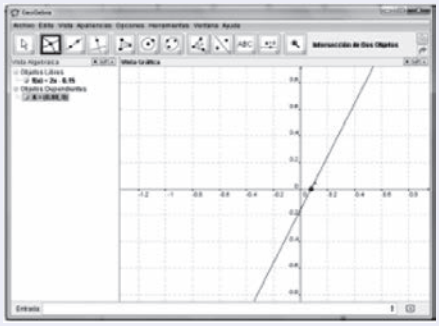


Figura 6.7 Gráfica de $x = 0.08$.

- Elegir el menú **Vista** y activar los ejes y la cuadrícula.
- Escribir en la barra de entrada $5x - 60$ y presionar la tecla **Enter.**
- Con la herramienta **zoom de alejamiento** ubicar la línea en la gráfica.
- Con la herramienta **intersección de dos objetos** hacer un clic en donde se cruza la recta con el eje x para encontrar el valor $x = 12$. En la **Figura 6.7** se observa el punto $A(12,0)$.
- Entonces las dimensiones buscadas son 12 cm por $1.5(12) = 18$ cm.

2. Utiliza el *software GeoGebra* para calcular la tasa anual de interés que paga un banco por una inversión de $2 000, si al año entrega al inversionista $152.

Solución

Por la descripción de la situación observamos que $2\,000x = 152$, donde x es la tasa de interés anual. Al utilizar *GeoGebra*, tenemos que:

- Elegir el menú **Vista** y activar los ejes y la cuadrícula.
- Escribir en la barra de entrada $2x - 0.152$ (dividimos entre mil para que sea más cómoda la escala y en el resultado final lo multiplicamos por mil), presionar la tecla **Enter**.
- Con la herramienta **zoom de acercamiento** ubicar la línea en la gráfica.
- Con la herramienta **intersección de dos objetos** hacer un clic en donde se cruza la recta con el eje x para encontrar el valor de $x = 0.08$. En la **Figura 6.8** se observa el punto $A(0.08,0)$ y la gráfica correspondiente.
- Esto significa que la tasa buscada es de 8 por ciento.

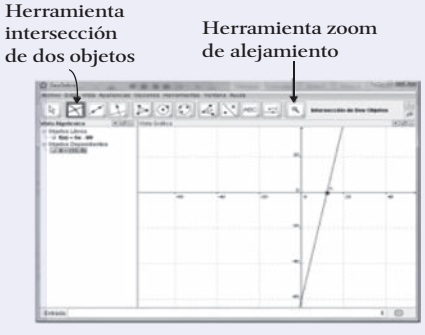


Figura 6.8 Punto $A(12,0)$.

Actividad de aprendizaje 3

Competencias a desarrollar

- CG 1.1
- CG 4.1
- CG 5.1
- CG 5.6
- CDBM 1
- CDBM 2
- CDBM 5

Resuelve las situaciones que a continuación se te plantean, construye sus gráficas y explica e interpreta los resultados obtenidos. Recuerda utilizar GeoGebra o el software graficador de tu elección. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. **Mezclas.** Se funden 100 gramos de oro con una pureza de 90% con oro de pureza a 75%. La mezcla resultante tiene una pureza de 85%. ¿Qué cantidad de oro de pureza a 75% se ha añadido a la mezcla? Observa la tabla siguiente.

Pureza	Cantidad	Total
90%	100	90
75%	x	$0.75x$
85%	$x + 100$	$(x + 100)(0.85)$

2. **Movimiento rectilíneo uniforme.** Un conductor viaja de una ciudad *A* hasta una ciudad *B* con una rapidez promedio de 80 km/h, y permanece en la ciudad *B* 10 horas; en su recorrido de regreso viaja a un promedio de 72 km/h. El tiempo total que utilizó en el viaje redondo fue de 34 horas. ¿Cuántos kilómetros hay de la ciudad *A* hasta la ciudad *B*?

GLOSARIO

Momento de torsión. Es el producto de la fuerza perpendicular por el brazo de palanca.

3. **Palancas.** Un mecánico ejerce una fuerza de 10 N, en el extremo de una llave inglesa de 25 cm, formando un ángulo de 60° con la horizontal (**Figura 6.9**). ¿Cuál es el **momento de torsión** producido en la tuerca?

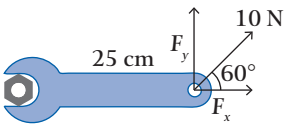


Figura 6.9 Fuerza en el extremo de una llave inglesa.

4. Cantidad. Un sistema de dos poleas está conectado por medio de una banda. La polea más chica tiene un radio de 30 cm y la grande de 90 cm. Cuando la polea chica ha dado 20 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la grande?

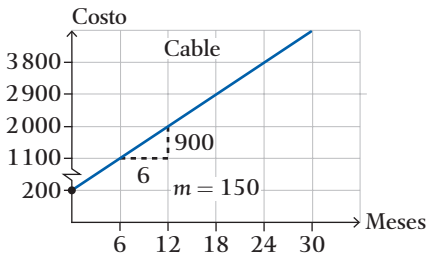
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

En acción

Tienes dos alternativas para contratar un servicio de televisión. Una opción A de cable cuyo costo de instalación es de $200 más $150 mensuales de renta, y otra opción B con receptor de antena cuyo costo de instalación es de $1 400 más $100 por renta mensual. ¿En cuántos meses los costos serán iguales?

a) Vamos a llamar *y* al costo total de la instalación del servicio de cable más el gasto de $150 mensuales por *x* meses. Escribe una ecuación para *y* en función de *x*. Observa la gráfica siguiente.

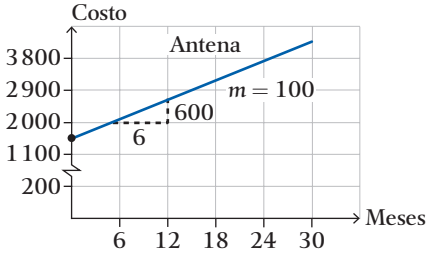
b) Completa la tabla siguiente donde *y* es el costo del servicio de cable por *x* meses.



x	*y*
0	
6	
12	
18	

c) Vamos a llamar *y* al costo total de la instalación del servicio con receptor de antena más el gasto de $100 mensuales por *x* meses. Escribe una ecuación para *y* en función de *x*. Observa la gráfica siguiente.

d) Completa la tabla siguiente donde *y* es el costo del servicio de antena por *x* meses.

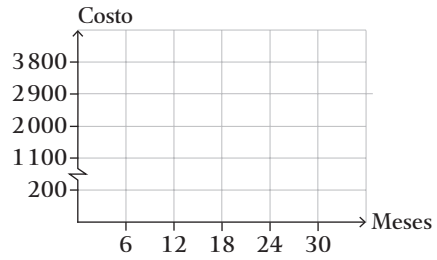


x	*y*
0	
6	
12	
18	

(*Continúa*)

(Continuación)

e) Elabora la gráfica de la información de las dos opciones sobre los mismos ejes coordenados.



f) Con referencia a la gráfica conjunta, ¿cuándo es más barato el servicio de cable? ¿Cuándo es más barato el servicio con receptor de antena?

Estimado estudiante, al inicio de este bloque aprendiste las nociones básicas para resolver ecuaciones lineales. Ahora, es tiempo de que aprendas a reconocer el modelo algebraico de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas, así como a resolver e interpretar dichos sistemas mediante los métodos: numérico (determinantes), algebraicos (eliminación por igualación, reducción (suma y resta) y sustitución) y gráficos. De tal forma que desarrolles las competencias para resolver problemas o situaciones diversas que conlleven la puesta en práctica de estos conocimientos.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas o sistema de ecuaciones de 2×2 consiste en agrupar dos ecuaciones lineales con dos variables comunes de forma tal que se puedan realizar artificios algebraicos para que nos proporcionen una solución o cualquier pareja de valores (x, y) que satisfaga a ambas ecuaciones, tal solución representa el punto de cruce o intersección de las ecuaciones. Por ejemplo para el sistema:

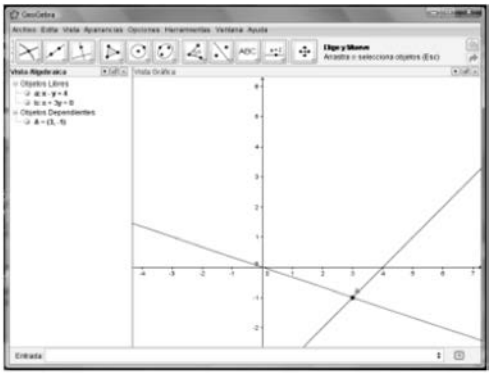
$$x - y = 4$$
$$x + 3y = 0$$

Los valores que satisfacen ambas ecuaciones son $x = 3$ y $y = -1$ porque:

$$3 - (-1) = 4$$
$$3 + 3(-1) = 0$$

El *software GeoGebra* nos sirve para encontrar tal solución.

- En la barra de entrada se ingresa $x - y = 4$; para escoger el color de la recta selecciona **edita** y luego **propiedades del objeto**.
- En la barra de entrada se ingresa $x + 3y = 0$; para escoger el color de la recta selecciona **edita** y luego **propiedades del objeto**.
- Con el puntero de selección hacer un clic en la intersección y nos da el punto de solución $A(3,-1)$.



Métodos para resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Método numérico: determinantes

Se llama **determinante** A al número que resulta del arreglo de escribir igual número de renglones que de columnas. Los determinantes nos sirven también para resolver ecuaciones con dichos arreglos.

Para representar un determinante se usa el símbolo $|A|$. El arreglo más sencillo de determinante es el que consta de un renglón por una columna, es decir, aquel que contiene un solo elemento: $|A| = a$. Si el determinante $|A|$ tiene 2×2 elementos, el arreglo se define como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Evalúa el determinante $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 4(2) = 15 - 8 = 7$$

Los determinantes se utilizan para resolver ecuaciones lineales con un método que se llama *regla de Cramer.*

Pensemos que queremos resolver el sistema de ecuaciones:

$$ax + by = r$$
$$cx + dy = s$$

Utilizando el método de eliminación de una variable, por ejemplo, la y, multiplicamos la primera ecuación por d y la segunda por b y las restamos. Es decir:

$$\begin{array}{r} d(ax) + d(by) = rd \\ -b(cx) - b(dy) = -sb \\ \hline adx - bcx = rd - sb \end{array}$$

(Continúa)

(*Continuación*)

Factorizamos y despejamos x; el resultado es:

$$x = \frac{rd - sb}{ad - bc}$$

A partir de la definición de determinante, la solución para x puede escribirse de la siguiente forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

De una forma análoga, la solución para y es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{as - rc}{ad - bc}$$

Observa que, en ambas soluciones, el denominador es el determinante del arreglo de los coeficientes de las ecuaciones; lo llamaremos D. El numerador de la solución para x es el determinante del arreglo que se obtiene del mismo determinante, pero sustituyendo la primera columna por los términos independientes r y s. De igual manera ocurre con y: el numerador es el determinante del arreglo D al remplazar la segunda columna, la de los coeficientes de y, por r y s. Resumimos lo anterior con los siguientes determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}$$

La solución del sistema se expresa en la forma:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad D \neq 0$$

Si D fuera cero, esto indicaría que la ecuación no tiene solución.

En acción

1. Calcula el determinante de los siguientes arreglos.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$

2. Utiliza el método de determinantes para resolver los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $x-2y=9$ $-2x-3y=10$	$D=$
Solución $x=$ $y=$	$D_x=$ $D_y=$

b) $x+y=5$ $x-y=1$	$D=$
Solución $x=$ $y=$	$D_x=$ $D_y=$

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la calculadora para la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (https://bit.ly/2KddDZc).

Métodos analíticos

Métodos de sustitución e igualación

Los métodos de sustitución e igualación para resolver ecuaciones simultáneas, son procesos analíticos muy eficientes y precisos. En estos métodos, en una de las ecuaciones se despeja una variable en función de la otra. A continuación, la variable despejada se sustituye o se iguala (según sea el método utilizado) en la otra ecuación para que quede una sola variable y se pueda resolver.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Resuelve por sustitución el sistema: $2x+y=1$, $3x+4y=14$

Solución

Analiza la siguiente secuencia para resolver el sistema por eliminación.

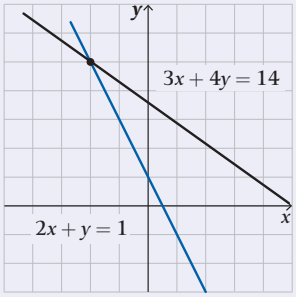
Se selecciona una ecuación	Se despeja una variable	Se sustituye y en la otra ecuación y se resuelve	Se sustituye el valor obtenido en la otra ecuación
$2x+y=1$	$y=1-2x$	$3x+4(\underbrace{1-2x}_{y})=14$ $3x+4-8x=14$ $3x-8x=14-4$ $-5x=10$ $x=-\frac{10}{5}$ $x=-2$	$y=1-2x$ $y=1-2(-2)$ $y=5$

(Continúa)

(Continuación)

GLOSARIO

Par ordenado. Es una pareja de datos que pueden representarse en el plano cartesiano como (x,y).



La solución de la ecuación es el **par ordenado** $(-2,5)$. La figura siguiente indica que las gráficas de las ecuaciones son las rectas que se intersecan en dicho punto.

2. Resuelve por **igualación** el sistema:

$$x + y = 8$$
$$2x - 3y = -9$$

Solución

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 8 - x$$

Hacemos lo mismo con la otra ecuación:

$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

Igualamos las expresiones anteriores y resolvemos la igualdad. Es decir:

$$8 - x = \frac{2}{3}x + 3$$
$$24 - 3x = 2x + 9 \qquad \text{Multiplicamos todo par 3.}$$
$$-3x - 2x = 9 - 24 \qquad \text{Trasponemos terminos.}$$
$$-5x = -15 \qquad \text{Reducimos Ia igualdad.}$$
$$x = \frac{15}{5} = 3 \qquad \text{Multiplicamos todo por } -\frac{1}{5}.$$

A continuación, sustituimos $x = 3$ en $y = 8 - x$ y calculamos el valor de y:

$$y = 8 - 3 = 5$$

La solución es el par ordenado $(3,5)$ y la **Figura 6.10** muestra las gráficas de las dos ecuaciones.

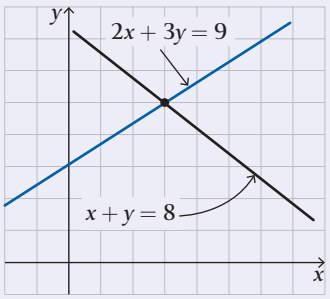


Figura 6.10 Gráfica de $x + y = 8$ y $2x - 3y = -9$.

3. Una persona invirtió \$25 000 en dos cuentas bancarias; una de éstas paga 5% y la otra 6% de interés simple. Si la persona recibió \$1 440 de intereses en un año, ¿qué cantidad invirtió en cada cuenta?

Solución

Resumimos la información de la siguiente manera.

Dinero invertido	Cantidad invertida al 5%	Cantidad invertida al 6%	Ecuaciones
\$25 000	x	y	$x+y=25\,000$ $0.05x+0.06y=1\,440$

$$y = 25\,000 - x$$ Despejamos y de la primera ecuación.

$$0.05x + 0.06(25000 - x) = 1\,440$$ Sustituimos y en la segunda ecuación.

$$0.05x + 1\,500 - 0.06x = 1\,440$$ Simplificamos.

$$-0.01x = -60$$ Simplificamos.

$$x = \frac{60}{0.01} = 6\,000$$ Despejamos x.

$$y = 25\,000 - 6\,000 = 19\,000$$ Despejamos y.

Por lo tanto, se invirtieron \$6 000 al 5% y \$19 000 al 6%.

En acción

1. Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución o igualación. Determina si las rectas son paralelas, si se cortan en un punto o si tienen un número infinito de soluciones.

$$y = 2x - 4$$
$$-2x = y - 4$$

Selecciona una ecuación	Despeja una variable
Sustitúyela en la otra ecuación y resuelve	**Sustituye el valor obtenido en la otra ecuación y obtén el valor de la otra variable**

2. Una compañía telefónica hace un cargo de \$350 por la instalación inicial más \$200 al mes. Otra cobra \$200 por la instalación inicial más \$350 al mes. ¿Al final de qué mes el costo será el mismo en las dos compañías?

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la calculadora para la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (https://bit.ly/2KddDZc).

Métodos de eliminación (suma y resta) para resolver ecuaciones simultáneamente

Hasta aquí, hemos resuelto sistemas de ecuaciones con dos variables por los métodos gráfico, de sustitución e igualación. Cuando no es deseable o factible utilizar alguno de estos métodos, hay otra opción: el **método de eliminación**, también conocido como método de **suma** o **resta**.

Este método resulta conveniente cuando el sistema de ecuaciones tiene una variable con el mismo coeficiente, ya sea que tenga el mismo signo o signo contrario, lo que nos permite sumar ambas ecuaciones y eliminar una de las variables. Aquí te presentamos cómo hacerlo.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Resuelve el sistema:

$$2x + y = 1$$
$$3x - 2y = -9$$

Solución

La idea es multiplicar una o ambas ecuaciones por la misma cantidad para así eliminar una de las variables y obtener una ecuación con una sola incógnita.
Analiza la siguiente secuencia para resolver el sistema por eliminación.

Sistema de ecuaciones dado:	Multiplicamos la primera ecuación por 2 y sumamos ambas ecuaciones para eliminar *y*:	Escribimos 1 en vez de *x* en $2x + y = 1$:
$2x + y = 1$ $3x - 2y = -9$	$4x + 2y = 2$ $3x - 2y = -9$ $7x + 0y = -7$ De la ecuación anterior, despejamos *x*: $x = -\frac{7}{7} = -1$	$2(-1) + y = 1$ $y = 1 + 2$ $y = 3$ La solución del sistema es el par de coordenadas (–1,3).

2. Veamos ahora un sistema *inconsistente*. Resuelve el sistema:

$$2x + 3y = 3$$
$$4x + 6y = -6$$

Solución

En este caso, nos conviene eliminar la *x* multiplicando la primera ecuación por -2:

$$2x + 3y = 3 \qquad \text{Multiplicamos por } -2.$$
$$4x + 6y = -6 \qquad \text{Se queda como está.}$$

Al hacer las operaciones, tenemos:

$$-4x - 6y = -6$$
$$4x + 6y = -6$$
$$0 + 0 = -12$$

Como vemos, no hay solución, puesto que esto es un absurdo; el sistema es *inconsistente*.

3. Hay casos en que es necesario multiplicar ambas ecuaciones por diferentes números para que los coeficientes de alguna de las variables cambien de signo y sean del mismo valor absoluto. Resolvamos el sistema:

$$2x+3y=3$$
$$5x+2y=13$$

Solución

Multipliquemos ambas ecuaciones por números que nos den coeficientes de forma que una de las variables se pueda eliminar, por ejemplo, la x.

$$\begin{aligned} 2x+3y&=3 && \text{Multiplicamos por } 5.\\ 5x+2y&=13 && \text{Multiplicamos por } -2. \end{aligned}$$

Al hacer las operaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} 10x+15y&=15\\ -10x-4y&=-26\\ \hline 11y&=-11 && \text{Sumamos.}\\ y&=-1 \end{aligned}$$

Sustituimos -1 en vez de y en la ecuación $2x+3y=3$, así:

$$\begin{aligned} 2x+3(-1)&=3\\ 2x-3&=3 && \text{Simplificamos.}\\ 2x&=6\\ x&=3 \end{aligned}$$

De esta manera, la solución del sistema es $(3,-1)$.
Como es evidente, una segunda opción para obtener la solución sería eliminar y.

En acción

Resuelve con el método de eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones y establece si tienen una solución o si son inconsistentes o dependientes.

1. $x+y=3$
$x-y=1$

Escribe el sistema de ecuaciones dado	Elimina una de las variables y resuelve el valor de la otra	Despeja la variable que eliminaste

(Continúa)

(Continuación)

2. $2x + y = 4$
$4x + 2y = 0$

Escribe el sistema de ecuaciones dado	Elimina una de las variables y resuelve el valor de la otra	Despeja la variable que eliminaste

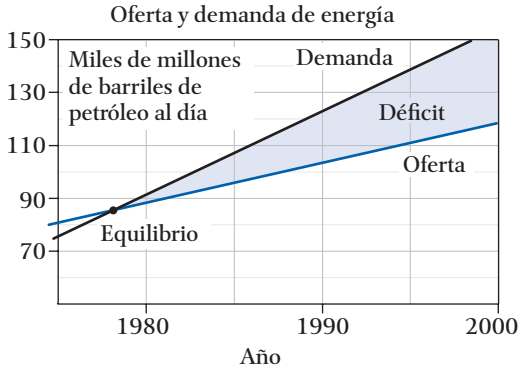
3. Escribe en el paréntesis correspondiente la letra que contenga la solución correcta de cada sistema.

( ) $x - 2y = 9$ $-2x - 3y = 10$	( ) $x + y = 5$ $x - y = 1$	( ) $x + 2y = 4$ $x - 2y = 8$	( ) $x + y = 3$ $x - y = -1$
a) (3,2)	b) (6,−1)	c) (1,−4)	d) (1,2)

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la calculadora para la resolución de ecuaciones lineales con dos incógnitas (https://bit.ly/2KddDZc).

Método gráfico

Si observamos en la gráfica siguiente, es muy evidente que hay un punto donde las líneas de la oferta y la demanda coinciden; éste se llama **punto de intersección** y es la solución simultánea de las dos ecuaciones que representan a las líneas. En esta sección vamos a aprender el **método gráfico** para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, si es que existe la solución.



La solución simultánea de dos ecuaciones con dos variables es un par ordenado de números reales (x, y) que representan un *punto común* al lugar geométrico de las dos líneas rectas. Por lo tanto, en el **método gráfico** nos basaremos en la gráfica de las dos ecuaciones lineales para determinar su solución.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Encuentra de manera gráfica la solución de:

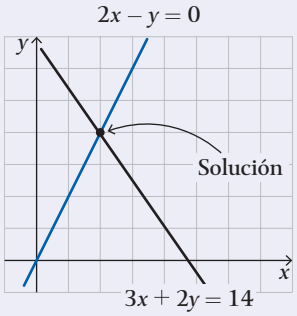
$$2x - y = 0$$
$$3x + 2y = 14$$

Solución

Primero, hay que elaborar las gráficas de cada ecuación como lo hicimos en la sección anterior. Para ello, construyamos una tabla como la siguiente:

x	$y = 2x$
0	0
1	2

x	$y = -\frac{3}{2}x + 7$
0	7
2	4



En la figura anterior podemos observar que el par ordenado que satisface al sistema de ecuaciones es (2,4). Analicemos la *comprobación*:

$$2(2) - 4 = 0$$
$$3(2) + 2(4) = 14$$

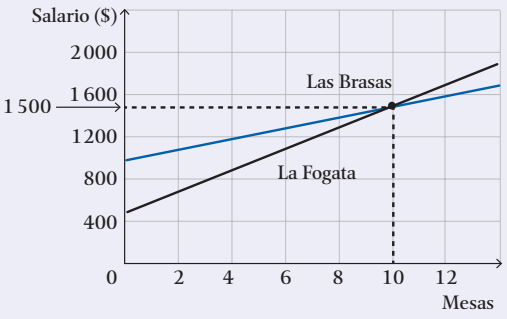
2. El restaurante Las Brasas paga a sus camareros $500 a la semana más las propinas, que promedian $100 por mesa. La Fogata paga $1 000 a la semana, pero las propinas promedian sólo $50 por mesa. ¿Cuántas mesas x tendría que atender un mesero para que su salario semanal y fuera el mismo en ambos restaurantes?

Solución

Con la siguiente tabla resumimos la situación.

Restaurante	Las Brasas	La Fogata
Salario	$y = 500 + 100x$	$y = 1\,000 + 50x$

En la gráfica de ambas funciones se aprecia que los valores son (10,1 500), es decir, con 10 mesas el salario será igual a $1 500.



En acción

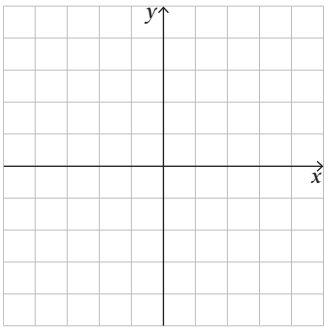
Resuelve cada sistema por el método gráfico.

1. $x + y = 4$

$x - y = -2$

x	y =

x	y =

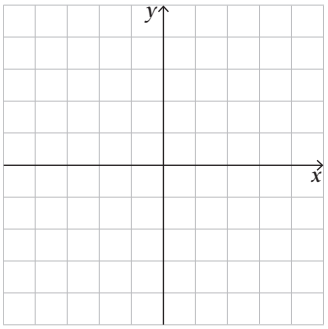


2. $3x - y = 6$

$x + y = 3$

x	y =

x	y =



Gráfica de una o infinitas soluciones, o ninguna

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. Encuentra de manera gráfica la solución de:

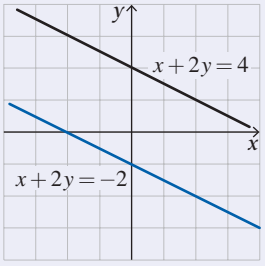
$$x + 2y = 4$$
$$x + 2y = -2$$

Solución

Construimos una tabla para elaborar las gráficas de las ecuaciones dadas. Es decir:

x	$y = -\frac{1}{2}x - 1$
0	−1
−2	0

x	$y = -\frac{1}{2}x + 2$
0	2
2	1



Como se aprecia en la gráfica, las rectas son paralelas y no se intersecan; por lo tanto, el sistema no tiene solución. Cuando ocurre esto, el sistema suele llamarse **inconsistente** y las pendientes de las rectas son iguales.

2. Encuentra de manera gráfica la solución de:

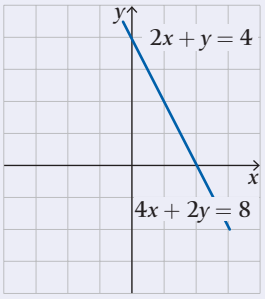
$$4x + 2y = 8$$
$$2x + y = 4$$

Solución

Construimos una tabla para elaborar las gráficas de las ecuaciones dadas.

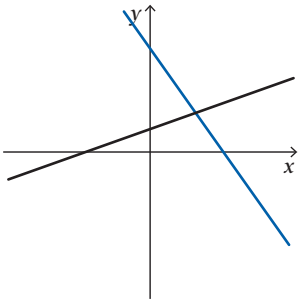
x	$y = -2x + 4$
0	4
2	0

x	$y = 4 - 2x$
0	4
2	0

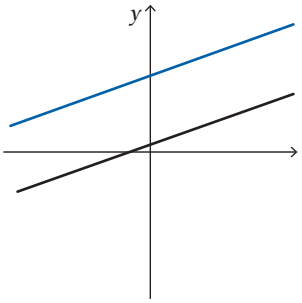


Cuando revisamos los puntos de cada ecuación, lo que vemos es que son los mismos para ambas. ¿Qué significa esto? Significa que las gráficas de cada ecuación lineal **coinciden**, es decir, son las mismas. De esta forma, la solución para una es la misma que para la otra; de hecho, hay un número infinito de soluciones. Se dice que un sistema de esta clase es **dependiente**.

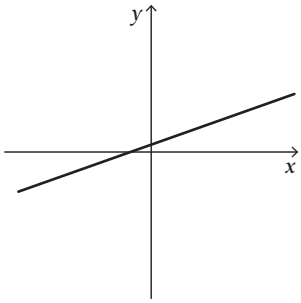
Como hemos visto hasta aquí, un sistema de ecuaciones puede tener exactamente una solución (cuando las líneas se cruzan). En tal caso, el sistema se llama **consistente**; cuando no tienen solución (las líneas son paralelas), el sistema es **inconsistente**; o bien, cuando existe un número infinito de soluciones (las líneas se superponen), el sistema es **dependiente**. Las figuras siguientes ilustran los tres casos.



Sistema consistente e independiente (una sola solución).



Sistema inconsistente; líneas paralelas (ninguna solución).



Sistema dependiente; las líneas coinciden (número infinito de soluciones).

En acción

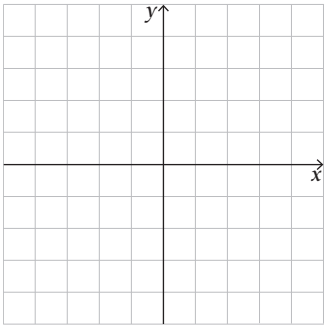
I. Resuelve cada sistema por el método gráfico. Determina si las rectas son paralelas, si se cortan en un punto o si tienen un número infinito de soluciones.

1. $x + y = 3$

$2x - y = 0$

x	$y =$

x	$y =$

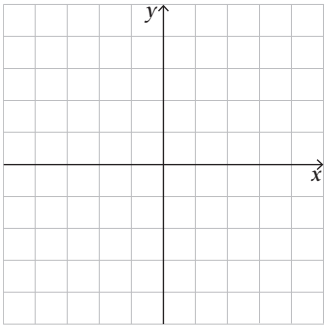


2. $3x + 12y = 2$

$x + 4y = 8$

x	$y =$

x	$y =$



II. Califica como falsa o verdadera cada afirmación marcando la casilla correspondiente con ✓.

Un sistema de ecuaciones de 2×2:	Falso	Verdadero
a) No tiene solución si las rectas son paralelas.		
b) No tiene solución si las rectas se cruzan en un punto.		
c) Tiene infinidad de soluciones si las rectas quedan sobrepuestas.		

Competencias a desarrollar

- CG 1.1
- CG 4.1
- CG 5.1
- CDBM 1
- CDBM 2

Actividad de aprendizaje 4

Analiza las situaciones que a continuación se presentan y resuelve como corresponda utilizando los sistemas de ecuaciones simultáneas por métodos: numéricos, analíticos o gráficos, señalando por qué algunas soluciones no son admisibles para el contexto del problema. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. Un barco recorre 77 kilómetros con la corriente a su favor en 1 hora; de regreso (con la corriente en contra), tarda 4 horas para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la velocidad del flujo de la corriente?

Sugerencia: para resolver la situación observa las velocidades y **desplazamientos** de la tabla siguiente:

GLOSARIO

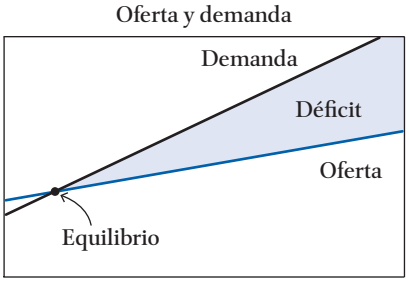
Desplazamiento. Es igual a la velocidad por el tiempo.

Velocidades	Desplazamiento = velocidad × tiempo
$x =$ velocidad del barco	$(x + y)(1) = 77$ con la corriente a favor
$y =$ velocidad de la corriente	$(x - y)(4) = 77$ con la corriente en contra

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2G3nsJP

2. La oferta y de cierto producto está dada por la ecuación $y = 3x + 8$ donde x es el número de días transcurridos. Si la demanda está dada por $y = 4x$, ¿en cuántos días la oferta igualará a la demanda?

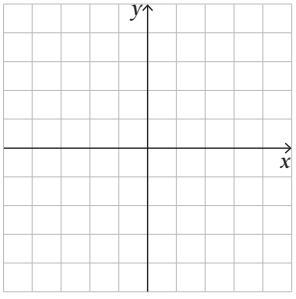


3. María invirtió $25 000: una parte al 7.5% y el restante al 6%. Si el interés anual de las dos inversiones es de $1 620, ¿cuánto dinero invirtió a cada tasa?

4. Calcula de manera gráfica el precio de una botella de agua y una de refresco, si dos botellas de agua más una de refresco valen $13 y dos botellas de agua más tres de refresco valen $23.

x	$y =$

x	$y =$



5. $5x - 3y = 14$
$3x - 2y = -3$

Al finalizar la actividad reflexionen sobre cómo se sintieron al apoyar o ser apoyado por uno de sus pares.

Competencias a desarrollar

- CG 4.1
- CG 6.4
- CDBM 1
- CDBM 2
- CDBM 5

Actividad de aprendizaje 5

Plantea y resuelve, en el espacio que a continuación se te proporciona, un problema de tu contexto cotidiano, que se pueda escribir en lenguaje algebraico y corresponda a un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Problema

Solución del problema

Competencias a desarrollar

- CG 1.1
- CG 4.1
- CG 5.1
- CG 5.6
- CDBM 1
- CDBM 2

Actividad de aprendizaje 6

Elabora la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, utilizando *GeoGebra* u otro *software* graficador de tu elección. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. $\begin{cases} 2x+y=8 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 5x+2y=2 \\ 7x+3y=6 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ x+y=6 \end{cases}$

En el espacio siguiente dibuja la gráfica de los sistemas de ecuaciones anteriores.

Tres variables

Sistema de ecuaciones lineales de 3 × 3

Un sistema de ecuaciones que contiene 3 ecuaciones, cada una con las tres mismas variables se le denomina **sistema de 3 × 3** y representa rectas en el espacio tridimensional. Un ejemplo de dicho sistema sería:

$$\begin{aligned} x+2y-z&=2\\ 2x-y+z&=3\\ x+3y-2z&=1 \end{aligned}$$

Resolución de un sistema lineal de 3 × 3 por sustitución

Para resolver un sistema lineal de 3 × 3 por sustitución debemos seguir la siguiente secuencia:

1. Establecer el sistema de ecuaciones.
2. Despejar una variable. Sustituir en las otras ecuaciones.
3. Resolver el sistema 2 × 2 resultante.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Resuelve por el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+2z&=2\,750\\ 2x+y+0&=2\,000\\ x+2y+z&=2\,250 \end{aligned}$$

Solución

Para identificar las ecuaciones las enumeramos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x+y+2z&=2\,750 \quad \ldots\ldots\ldots (1)\\ 2x+y+0&=2\,000 \quad \ldots\ldots\ldots (2)\\ x+2y+z&=2\,250 \quad \ldots\ldots\ldots (3) \end{aligned}$$

Paso 1. Despejamos una variable en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, x de (1):

$$x=2750-y-2z \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Paso 2. Sustituimos el valor de x en las ecuaciones (2) y (3):

$$\begin{aligned} 2x+y+0&=2\,000\\ 2(2750-y-2z)+y+0&=2\,000\\ 5500-y-4z&=2\,000\\ -y-4z&=2\,000-5\,500\\ -y-4z&=-3\,500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+z&=2\,250\\ (2750-y-2z)+2y+z&=2\,250\\ -y-2z+2y+z&=2\,250-2\,750\\ y-z&=-500 \end{aligned}$$

Paso 3. Resolvemos el sistema 2 × 2 resultante:

$$\begin{aligned} -y-4z&=-3\,500 \quad \ldots\ldots\ldots (5)\\ y-z&=-500 \quad \ldots\ldots\ldots (6) \end{aligned}$$

(Continúa)

(Continuación)

Por suma y resta, tenemos:

$$\begin{aligned} -y-4z &= -3\,500 \\ y-z &= -500 \\ \hline -5z &= -4\,000 \end{aligned}$$

Despejamos a z:

$$z = \frac{-4\,000}{-5} = 800$$

Paso 4. Sustituimos el valor de z en (6) y obtenemos el valor de y:

$$\begin{aligned} y-800 &= -500 \\ y &= -500+800 \\ y &= 300 \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de z y y en (4) y obtenemos el valor de x:

$$\begin{aligned} x &= 2750-y-2z \\ x &= 2750\ -300\ -\ 2(800) \\ x &= 850 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es (850,300,800).

WEB

En la película La jungla de Cristal, donde Bruce Willis es el protagonista se presentan varios acertijos, busca la película e intenta responder antes que él. Comparte tus respuestas con algún compañero.

Resolución de un sistema de ecuaciones de 3 × 3 por reducción (suma y resta)

En este método, se eliminan en una de las ecuaciones dos variables y enseguida se elimina una variable de otra ecuación para que finalmente podamos usar la sustitución hacia atrás para llegar a la solución. Observa detalladamente el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 2 \\ 2x-y+z &= 3 \\ x+3y-2z &= 1 \end{aligned}$$

Solución

Para identificar las ecuaciones las enumeramos de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x+2y-z &= 2 && \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x-y+z &= 3 && \ldots\ldots\ldots (2) \\ x+3y-2z &= 1 && \ldots\ldots\ldots (3) \end{aligned}$$

Paso 1. Eliminamos los términos en x de las ecuaciones (2) y (3).
Multiplicamos por -2 a (1), obtenemos:

$$-2x-4y+2z=-4 \qquad \text{..... (4)}$$

Sumamos (4) y (2), tenemos que:

$$\begin{array}{r} -2x-4y+2z=-4 \\ 2x-y+z=3 \\ \hline -5y+3z=-1 \end{array} \qquad \text{..... (5)}$$

De la misma manera, multiplicamos la primera ecuación por -1 y la sumamos con la tercera.
Multiplicamos por -1 a (1), obtenemos:

$$-x-2y+z=-2 \qquad \text{..... (6)}$$

Sumamos (6) y (3), tenemos que:

$$\begin{array}{r} -x-2y+z=-2 \\ x+3y-2z=1 \\ \hline y-z=-1 \end{array} \qquad \text{..... (7)}$$

El resultado es un sistema más sencillo, equivalente al sistema original:

$$\begin{aligned} x+2y-z&=2 && \text{..... (5)} \\ -5y+3z&=-1 && \text{..... (6)} \\ y-z&=-1 && \text{..... (7)} \end{aligned}$$

Paso 2. Eliminamos la variable y de (6).
Multiplicamos por 5 a (7), obtenemos:

$$5y-5z=-5 \qquad \text{..... (8)}$$

Sumamos (6) y (8), tenemos que:

$$\begin{array}{r} -5y+3z=-1 \\ 5y-5z=-5 \\ \hline -2z=-6 \end{array} \qquad \text{..... (9)}$$

De la ecuación (9) despejamos a z y encontramos su valor:

$$z=-\frac{6}{2}=3 \qquad \text{..... (10)}$$

Nuestro trabajo se ha reducido al siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x+2y-z&=2 && \text{..... (5)} \\ -5y+3z&=-1 && \text{..... (6)} \\ z&=3 && \text{..... (10)} \end{aligned}$$

Paso 3. A partir del sistema anterior, sustituimos hacia atrás.
Sustituimos el valor de z en (6) y resolvemos para y:

$$\begin{aligned} -5y+3(3)&=-1 \\ -5y&=-1-9 \\ y&=\frac{-10}{-5} \\ y&=2 \end{aligned}$$

(Continúa)

(Continuación)

Por último, sustituimos los valores de y y z en (5) y resolvemos para x:

$$\begin{aligned} x+2(2)-3&=2\\ x+1&=2\\ x&=2-1\\ x&=1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x=1, y=2, z=3$ y se expresa de la forma (1,2,3).

Comprobación

$1+2(2)-3=2$
$5-3=2$
$2=2$

$2(1)-2+3=3$
$2-2+3=3$
$3=3$

$1+3(2)-2(3)=1$
$1+6-6=1$
$1=1$

En acción

Resuelve, en tu cuaderno, cada sistema por el método de reducción (suma y resta).

a) $\begin{cases} 2x-y+z=-1\\ x+2y+2z=4\\ 3x-5y+4z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5y+4z=440\\ 6x+4y+5z=685\\ 9x+10y=100 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y+z=-4\\ x+2y+2z=-2\\ 3x-5y+4z=-3 \end{cases}$

Resolución de un sistema lineal de 3 × 3 por determinantes

Para resolver un sistema de ecuaciones de 3 × 3 como el siguiente:

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=A\\ dx+ey+fz&=B\\ gx+hy+iz&=C \end{aligned}$$

Podemos hacer uso de los determinantes D, D_x, D_y, D_z y a su vez obtener los cocientes:

$$x=\frac{D_x}{D}, \qquad y=\frac{D_y}{D}, \qquad z=\frac{D_z}{D}$$

que son la solución del sistema 3 × 3.

Para calcular el determinante D de un arreglo de 3 × 3, procederemos de la siguiente manera:

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f\\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f\\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e\\ g & h \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante D_x se procede de manera análoga, pero se cambian los coeficientes de x: a, d y g por los términos independientes A, B y C; de la misma manera se obtienen D_y y D_z y, como consecuencia, y y z. Es decir:

$$D_x=\begin{vmatrix} A & b & c\\ B & e & f\\ C & h & i \end{vmatrix}=A\begin{vmatrix} e & f\\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} B & f\\ C & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} B & e\\ C & h \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} B & f \\ C & i \end{vmatrix} - A\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & B \\ g & C \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & B \\ h & C \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & B \\ g & C \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Una persona descubre que, para una adecuada nutrición diaria, necesita complementar sus alimentos con las siguientes cantidades de vitaminas: 50 mg de niacina, 50 mg de riboflavina y 50 mg de tiamina. La tabla siguiente menciona tres marcas de pastillas vitamínicas e indica las cantidades de vitaminas por pastilla. ¿Cuántas pastillas de cada marca debe tomar diariamente la persona en cuestión?

	Fortex	Fortísimo	Forteplus
Niacina (mg)	5	10	15
Riboflavina (mg)	15	20	0
Tiamina (mg)	10	10	10

Solución

Llamemos x, y y z al número de pastillas diarias que debe tomar la persona, y diseñemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 5x + 10y + 15z &= 50 \\ 15x + 20y + 0z &= 50 \\ 10x + 10y + 10z &= 50 \end{aligned}$$

A partir del determinante inicial, calculamos D:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$D = 5(200-0) - 10(150-0) + 15(150-200) = -1\,250$$

Para D_x tenemos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 50 & 10 & 15 \\ 50 & 20 & 0 \\ 50 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 50\begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 50 & 10 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 50 & 20 \\ 50 & 10 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 50(200-0) - 10(500-0) + 15(500-1\,000) = -2\,500$$

Sabemos que x se calcula como:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2\,500}{-1\,250} = 2$$

(Continúa)

(Continuación)

Para D_y tenemos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 50 & 15 \\ 15 & 50 & 0 \\ 10 & 50 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 50 & 10 \end{vmatrix} - 50\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 15 & 50 \\ 10 & 50 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 5(500-0) - 50(150-0) + 15(750-500) = -1\,250$$

Sabemos que y se calcula como:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1\,250}{-1\,250} = 1$$

Para D_z tenemos:

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 50 \\ 15 & 20 & 50 \\ 10 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 15 & 50 \\ 10 & 50 \end{vmatrix} + 50\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 5(1\,000-500) - 10(750-500) + 50(150-200) = -2\,500$$

Sabemos que z se calcula como:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-2\,500}{-1\,250} = 2$$

La solución para el sistema es $(x,y,z) = (2,1,2)$ y significa que la dosis diaria debe ser 2 pastillas de Fortex, 1 de Fortísimo y 2 de Forteplus.

Resolución de un sistema lineal de 3 × 3 por el método gráfico

En secciones anteriores estudiamos sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas y sabemos, que su representación gráfica nos brinda información de la solución de dicho sistema y que se dibuja en un plano cartesiano de dos dimensiones por medio de los ejes x y y, para representar la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 3 × 3 necesitamos un sistema cartesiano tridimensional que consiste en un espacio formado por la intersección de tres rectas en un ángulo de 90°, los ejes x, y y z (**Figura 6.11**). Para ubicar un punto en el plano se hace lo mismo que en un sistema 2 × 2 (**Figura 6.12**). Su representación gráfica es un plano (**Figura 6.13**).

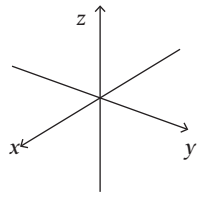


Figura 6.11 Ejes en tres dimensiones.

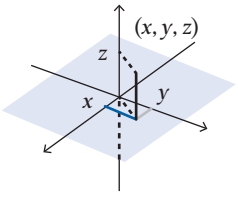


Figura 6.12 Ubicación de un punto en el espacio cuyas coordenadas son (*x*, *y*, *z*).

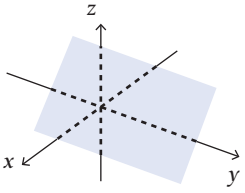
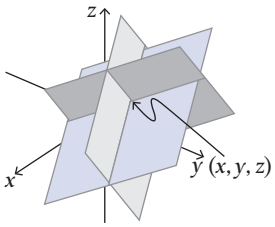
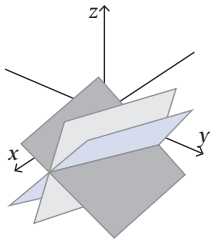


Figura 6.13 Plano de un sistema de ecuaciones 3 × 3.

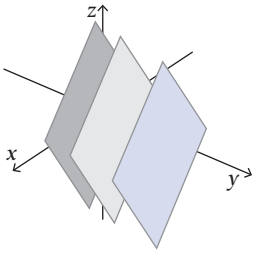
El elaborar o dibujar la gráfica de un sistema de ecuaciones como lo hemos estudiado nos permite visualizar las posibles soluciones, en un sistema lineal 3 × 3 ocurre lo mismo. A continuación mostramos los distintos casos que pueden presentarse.



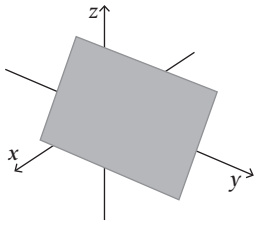
Sistema 3 × 3 con solución única en el punto (x, y, z).



Sistema 3 × 3 con planos coincidiendo en una línea. Infinidad de soluciones (puntos en común en la recta).



Sistema 3 × 3 con planos paralelos. Sin solución.

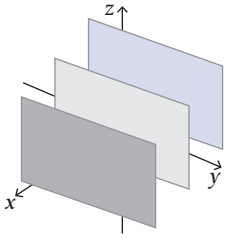


Sistema 3 × 3 con tres ecuaciones que representan al mismo plano. Infinidad de soluciones (infinidad de puntos en común en el plano).

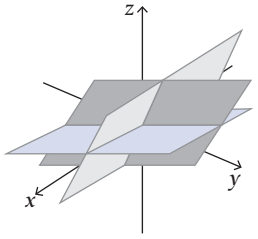
Sólo debemos tomar en cuenta que para realizar la gráfica de dicho sistema es importante contar con *software* como *GeoGebra*, *Derive* u otros, así como, calculadoras graficadoras que nos permitan visualizar dicha representación.

En acción

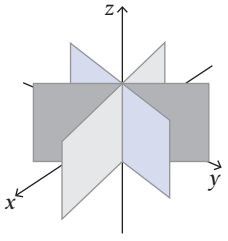
Para cada una de las siguientes representaciones gráficas escribe si tiene una solución única o no tiene solución o infinitas soluciones o una recta como solución.



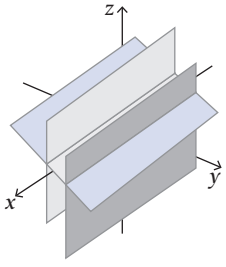
a) _____



c) _____



b) _____



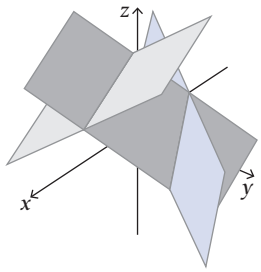
d) _____

(*Continúa*)

(*Continuación*)

WEB

Entra al vínculo de Internet siguiente: https://bit.ly/2KfJN6e en él encontrarás la transformación de un sistema de 3 × 3 a uno de 2 × 2 con *GeoGebra*. Analiza cuidadosamente el procedimiento.



e) _____

Para dar solución a planteamientos como los anteriores es necesario conocer las aplicaciones del alcance de las ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Competencias a desarrollar

- **CG 1.1**
- **CG 4.1**
- **CG 5.1**
- **CG 6.4**
- **CDBM 1**
- **CDBM 2**
- **CDBM 4**

Actividad de aprendizaje 7

Aplica tus aprendizajes sobre sistemas de ecuaciones de con tres incógnitas y resuelve según corresponda. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. De forma individual analiza las situaciones que a continuación se presentan y resuélvelas según corresponda, utilizando sistemas de ecuaciones simultáneas por los métodos: numéricos, algebraicos y gráficos.

a) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ y+2z=5 \\ x+y+3z=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+2z=4 \\ 4x+y-3z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + \quad + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$

2. Tres amigos gastaron cierta cantidad de dinero en un restaurante. La suma del gasto del primero y el segundo rebasa en $20 el gasto del tercero; la suma del gasto del primero y del tercero excede por $60 el gasto del segundo; por último, el segundo y el tercero gastaron juntos $100 más que el primero. ¿Cuánto gastó cada uno?

3. Rosa, Martha y María compiten en un torneo en el que deben correr, nadar o andar en bicicleta determinadas distancias. La rapidez promedio de cada una aparece en la siguiente tabla.

	Rapidez promedio (mi/h)		
	Carrera	Natación	Ciclismo
Rosa	10	4	20
Martha	7.5	6	15
María	15	3	40

María llega primero, con un tiempo total de 1.75 horas; Rosa llega en segundo lugar, con un tiempo de 2.5 horas; y Martha llega al último con un tiempo de 3 horas. Calcula la distancia de cada parte de la competencia.

(Continúa)

(Continuación)

4. En una fábrica hay tres máquinas m_1, m_2 y m_3 para pulir lentes; cuando las tres máquinas están en operación, se pueden pulir 5 850 lentes en una semana. Cuando están en operación m_1 y m_2 únicamente, se pueden pulir 4 200 lentes a la semana. En cambio, cuando sólo trabajan m_1 y m_3, se pulen 3 450 lentes a la semana. ¿Cuántos lentes puede pulir cada máquina en una semana?

5. Analiza las respuestas que obtuviste al resolver cada uno de los ejercicios anteriores y explica por qué algunas soluciones no son admisibles en el contexto del problema.

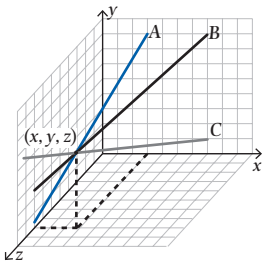
Actividad de aprendizaje 8

Competencias a desarrollar

- **CG** 1.1
- **CG** 4.1
- **CG** 5.1
- **CG** 5.6
- **CDBM** 1
- **CDBM** 2
- **CDBM** 5

I. Investiga en equipos de cuatro alumnos, ¿cómo se aplica un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas en problemas de la vida cotidiana? Elaboren un mapa donde expongan de manera coherente y breve su ejemplo y resuelvan la siguiente situación. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

1. La gráfica que se muestra a continuación representa un sistema de ecuaciones de 3 × 3, por simple inspección gráfico-visual determina la solución del sistema.



II. Resuelve individualmente los sistemas de ecuaciones simultáneas que se plantean a continuación y, posteriormente, explica a tus compañeros de equipo cómo llegaste a las soluciones obtenidas.

1. Una fábrica de ropa produce camisas de 3 tipos de fibras naturales: algodón, seda y lana. El proceso de producción de cada camisa se divide en 3 etapas: corte, armado y acabado. El tiempo necesario en horas para cada etapa se resume en la siguiente tabla.

	Algodón	Seda	Lana
Corte	2	1	3
Armado	4	5	3
Acabado	2	3	4

Si por semana la fábrica dispone de 70 horas para el corte, 110 para el armado y 95 para el acabado.

a) Escribe un modelo algebraico de 3 × 3 que represente el proceso de fabricación.

b) Determina el número de camisas que produce la fábrica semanalmente de cada fibra.

c) ¿Cuántas unidades se producen a la semana independientemente de la fibra con que se fabrican?

2. Un grupo de estudiantes realiza un viaje de estudios de 3 días a cierto lugar y algunos toman sus 3 alimentos diariamente en el mismo lugar. Si representamos con x, y y z los costos diarios de sus tres alimentos; desayuno, comida y cena respectivamente, la situación se puede modelar linealmente con el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4x+3y+5z=410 \\ 3x+2y+4z=300 \\ 2x+5y+3z=480 \end{cases}$$

a) ¿Qué significa cada una de las ecuaciones?

b) ¿Qué representan los números 410, 300, 480?

c) ¿Cuánto es el costo diario de cada alimento?

3. Una cadena de restaurantes de comida rápida en 3 ciudades diferentes A, B y C vende tres alimentos diferentes (tacos, burritos y refrescos) a un costo x, y y z respectivamente. La situación de las ventas en un día se puede modelar con el sistema siguiente:

$$\begin{array}{cccl} A & B & C & \\ 400x & +100y & +350z = 790 & \text{tacos} \\ 40x & +30y & +20z = 80 & \text{burritos} \\ 70x & +50y & +900z = 1\,003 & \text{refrescos} \end{array}$$

WEB

Para que revises más problemas y observes detalladamente la solución, entra al siguiente vínculo: https://bit.ly/2HYIoQO

(Continúa)

(Continuación)

a) ¿Qué representan los coeficientes de cada variable?
b) Las cantidades 790, 80 y 1 003, ¿qué significan?
c) ¿Cuál es el costo de cada alimento?
d) ¿Cuál fue la venta total del día?

Al finalizar la actividad reflexionen sobre cómo se sintieron al apoyar o ser apoyado por uno de sus pares.

Para elaborar tu mapa conceptual puedes hacer uso de las herramientas de *ExaTime*, *Text2MindMap*, *MindMup*, *Prezi* y *Lucidchart* (https://bit.ly/2otbnTg).

WEB

Consolida lo aprendido hasta el momento realizando lo siguiente: **1.** Revisa y trabaja con las actividades del recurso *Sistema de ecuaciones y desigualdades* (https://bit.ly/2qXUqSZ) y *Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas* (https://bit.ly/2KcNJ7T); **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos elijan uno de los temas estudiados en el bloque, repásenlo y utilizando el recurso *Crea un póster con ecuaciones* lineales (https://bit.ly/2HqrDkm) creen un póster que presentaran ante el grupo junto con una serie de 5 ejercicios interactivos; **3.** Para la serie de ejercicios pueden usar *Geogebra* (https://bit.ly/2HDgJ7S), *ProProfs* (https://bit.ly/2Jpy0C0) o *QuizWorks* (https://bit.ly/2ErnXbC); **4.** Compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Conexiones

Los sistemas de ecuaciones vistos durante este bloque, poseen múltiples aplicaciones en el modelaje de situaciones de las diversas áreas del conocimiento y de la vida real. Ahora es momento de que descubras cómo se relacionan Matemáticas 1 con Química 1, investigando el uso de los sistemas de ecuaciones lineales en el balanceo de ecuaciones químicas; y en el espacio que a continuación se te proporciona, argumenta cómo las matemáticas **coadyuvan** a la comprensión y análisis de este tipo de fenómenos.

GLOSARIO

Coadyuvar. Proceso mediante el cual se ayuda a que algo se realice.

SOMOS IGUALES

¿Sabías que todas las personas tenemos el derecho a la igualdad sin importar la raza, el género, las creencias, la condición socioeconómica y las capacidades físicas o mentales? Pero no siempre fue así, en la década de los 60 en Estados Unidos se vivió uno de los periodos de mayor discriminación hacia la gente afroamericana. Los vínculos siguientes presentan dos películas acerca de los retos que tuvieron que enfrentar dos equipos deportivos colegiales (uno universitario y otro de preparatoria) para alcanzar sus metas.

https://bit.ly/1w5tBop
https://bit.ly/2Jrkg8U

Posterior a ver la película que elijas socializa tus impresiones con el resto del grupo y juntos den respuesta a las siguientes interrogantes: ¿cómo puedo ser una mejor persona? ¿Cómo seremos una mejor comunidad?

Habilidad matemática

1. ¿Cuál es el valor de x y w en el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\frac{x}{2}+\frac{w}{3}=0$$
$$2x+\frac{w}{2}=-15$$

a) $x=-12, w=18$
b) $x=-60, w=90$
c) $x=12, w=-18$
d) $x=-60, w=-90$

2. Un comerciante tiene $50.00 y desea adquirir 20 artículos de papelería entre cuadernos (c) y bolígrafos (b), si el costo de cada cuaderno es de $7.00 y de cada bolígrafo de $3.00, el sistema de ecuaciones que representa dicho problema es:

a) $c+b=20$
$7c+3b=50$

b) $c+b=20$
$3c+7b=50$

c) $c+b=50$
$7c+3b=20$

d) $c+b=50$
$3c+7b=20$

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

1. ¿Qué es una ecuación equivalente?

2. ¿Qué es un sistema coordenado?

3. Explica la relación entre funciones y ecuaciones lineales.

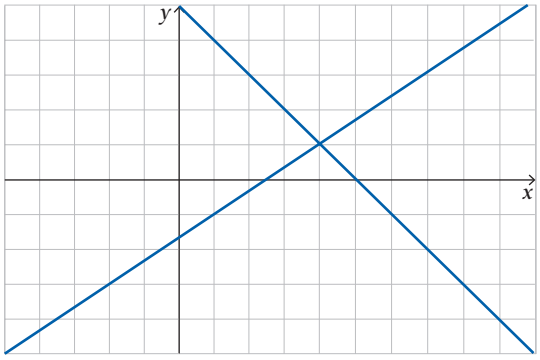
4. Enuncia un ejemplo de la vida cotidiana donde utilices un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas para resolver un problema.

(*Continúa*)

(Continuación)

Matemáticas gráficas

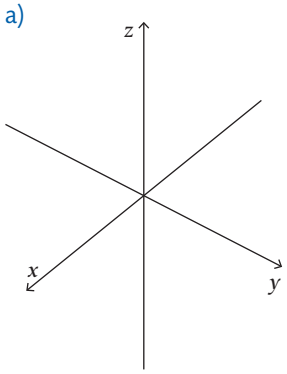
5. Determina el sistema de ecuaciones que se representa en la siguiente gráfica y determina la solución del sistema.



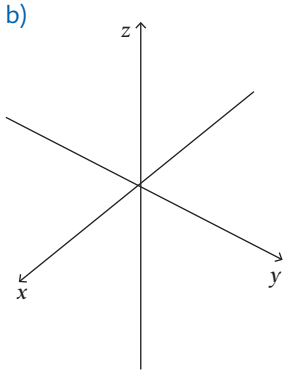
6. En los siguientes sistemas de coordenadas dibuja realiza la representación gráfica de un sistema 3×3 que:

a) Tenga una solución única.
b) No tenga solución.
c) Tenga una línea como solución.

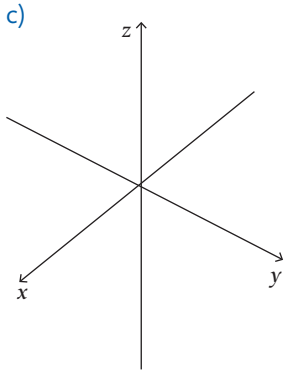
a)



b)



c)



Ejercicios numéricos

7. Determina la ecuación y la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(5,3)$ y $B(6,3)$
b) $L(17,5)$ y $M(5,9)$
c) $N(18,9)$ y $O(7,2)$
d) $P(5,3)$ y $Q(6,3)$

8. Resuelve, en tu cuaderno, las siguientes ecuaciones para las incógnitas x, y y z, según sea el caso:

a) $7(8y-4)=12-10(7y-4)$

b) $\dfrac{3}{5x-4}=\dfrac{1}{x+5}$

c) $8(5x-11)=3x-2$

d) $\dfrac{4}{x+12}=\dfrac{9}{-x+3}$

9. Utiliza el método de determinantes para resolver, en tu cuaderno, los siguientes sistemas de ecuaciones 2×2

a) $\begin{cases} 9x+2y=-12 \\ 7x+2y=-8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=-14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-9y=-9 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x-10y=-21 \\ 21x-5y=-27 \end{cases}$

10. Resuelve, en tu cuaderno, por los métodos de sustitución, igualación o eliminación los siguientes sistemas de ecuaciones 2×2.

a) $\begin{cases} 8x-y=28 \\ 5x-y=13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12x+9y=-1 \\ 3x-6y=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 28x-20y=5 \\ 12x-10y=3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x-9y=3 \\ 4x+9y=-12 \end{cases}$

11. Utiliza el método de determinantes para resolver, en tu cuaderno, los siguientes sistemas de ecuaciones 3×3.

a) $\begin{cases} 6x+3y+4z=58 \\ -7x-y-6z=-58 \\ x-2y+5z=12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+5z=65 \\ 4x+4y-3z=14 \\ 6x+y+3z=31 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y-3z=-1 \\ x+3y+3z=2 \\ x+3z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+3z=2 \\ 2x-3y-3z=-3 \\ 3x-3y-z=-1 \end{cases}$

12. Resuelve, en tu cuaderno, los siguientes sistemas de ecuaciones 3×3 sin utilizar el método de determinantes.

a) $\begin{cases} 7x+2y+2z=25 \\ x+4y+6z=5 \\ x-y-3z=7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-4y+z=35 \\ 7x+y-5z=-10 \\ -5x-y+2z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x-2y-3z=-3 \\ 3x+2y=-2 \\ 2x-3y-2z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x-5y-4z=2 \\ x-y+2z=-5 \\ -13x+13y+2z=11 \end{cases}$

(*Continúa*)

(Continuación)

Problemas de aplicación

13. Mauricio se dedica a coleccionar tarjetas conmemorativas, el primer día pagó $127 por 3 tarjetas de deportes y 10 de actores, el segundo día adquirió 5 de deportes y 6 de actores y por estás pago $105. Si cada tipo de tarjeta tiene el mismo valor, ¿cuál es el precio de cada tarjeta?

14. A un albañil le encomendaron la construcción de una barda con dos tipos de materiales, el primer día construyó 9 metros de barda utilizando 3 veces el primer material y 7 veces el segundo. Al día siguiente avanzo 7 metros usando 5 veces ambos materiales. ¿A cuánto equivale cada material?

15. En un concurso de pulgas, la primera pulga avanzó 40 cm dando 4 pasos, 5 brincos y rodó 4 veces. La segunda pulga avanzó 8 cm avanzando 6 pasos, retrocedió 6 brincos y posteriormente avanzo rodando 7 veces. Finalmente, la última pulga avanzó retrocedió 12 cm dando 6 pasos, 5 brincos hacia atrás y volvió a retroceder rodando 5 veces. Si los brincos, saltos y rodadas de las pulgas miden lo mismo. ¿A cuántos centímetros equivale cada uno?

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este sexto bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Resuelvo problemas de forma colaborativa mediante el uso de métodos gráficos y/o analíticos para ecuaciones lineales, siendo perseverante y reflexivo en la generación de alternativas de solución.				
Desarrollo estrategias de manera crítica para el planteamiento y solución de un problema de mi contexto.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.

(Continúa)

(Continuación)

Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 339 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Las siguientes situaciones pueden representarse a través de una ecuación lineal con una variable; analízalas, resuélvelas según corresponda y completa los datos que faltan en la tabla para encontrar la solución.	Problemas resueltos.	Pág. 195.	Lista de cotejo y problemario.
Interpreta los resultados obtenidos al resolver las situaciones planteadas en la actividad anterior, mediante la solución de una ecuación lineal con una incógnita.	Problemas resueltos.	Pág. 198.	Lista de cotejo.

Resuelve las situaciones que a continuación se te plantean, construye sus gráficas y explica e interpreta los resultados obtenidos. Recuerda utilizar *GeoGebra* o el *software* graficador de tu elección.	Lista de problemas.	Pág. 204.	Portafolio de evidencias.
Analiza las situaciones que a continuación se presentan y resuelve como corresponda utilizando los sistemas de ecuaciones simultáneas por métodos: numéricos, analíticos o gráficos, señalando por qué algunas soluciones no son admisibles para el contexto del problema.	Problemas resueltos.	Pág. 218.	Lista de cotejo.
Plantea y resuelve, en el espacio que a continuación se te proporciona, un problema de tu contexto cotidiano, que se pueda escribir en lenguaje algebraico y corresponda a un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas.	Problema planteado y resuelto.	Pág. 220.	Rúbrica.
Elabora la gráfica de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas, utilizando *GeoGebra* u otro *software* graficador de tu elección.	Gráficas.	Pág. 220.	Lista de cotejo.
Aplica tus aprendizajes sobre sistemas de ecuaciones de con tres incógnitas y resuelve según corresponda.	Ejercicios Resueltos.	Pág. 228.	Lista de cotejo.
Investiga en equipos de cuatro integrantes, ¿cómo se aplica un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas en problemas de la vida cotidiana? Elaboren un mapa donde expongan de manera coherente y breve su ejemplo y resuelvan cada una de las situaciones siguientes.	Problemas resueltos.	Pág. 230.	Prueba objetiva o rúbrica.

BLOQUE 7

Ecuaciones cuadráticas

TIEMPO ASIGNADO AL BLOQUE
7 horas

PROPÓSITO DEL BLOQUE

Aplica métodos de solución de problemas que involucren ecuaciones de segundo grado valorando su uso en situaciones de la vida cotidiana.

INTERDISCIPLINARIEDAD Y EJES TRANSVERSALES

Interdisciplinariedad	Ejes transversales
Química 1 Taller de Lectura y Redacción 1 Informática 1 Ética 1	Eje transversal Social Eje transversal Ambiental Eje transversal de la Salud Eje transversal de Habilidades lectoras

COMPETENCIAS GENÉRICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CG 5.1 Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
CG 5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
CG 8.2 Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS A DESARROLLAR EN EL BLOQUE

CDBM 1 Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
CDBM 2 Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
CDBM 4 Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
CDBM 5 Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

CONOCIMIENTOS

- Ecuaciones cuadráticas.
- Clasificación.
- Método de solución.

ACTITUDES

- Toma decisiones con base en resultados analizando consecuencias.
- Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad.
- Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos.
- Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.

HABILIDADES

- Describe las características de las ecuaciones cuadráticas y sus métodos de solución.
- Argumenta la solución obtenida para la toma de decisiones.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Propone soluciones de manera colaborativa a ecuaciones cuadráticas, interpretando el resultado en el contexto del problema.
- Explica la solución de ecuaciones cuadráticas para la toma de decisiones, valorando su uso en las problemáticas del entorno.

Aplicar métodos de solución en problemas que involucren ecuaciones de segundo grado valorando su uso en situaciones de la vida cotidiana

Requiere

Saber conocer

- Ecuaciones cuadráticas
  - Clasificación
  - Métodos de solución

Saber hacer

Lo cual implica

- Describir las características de las ecuaciones cuadráticas y sus métodos de solución
- Argumenta la solución obtenida para la toma de decisiones

Saber vivir juntos

- Tomando decisiones con base en resultados analizando consecuencias
- Reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad
- Privilegiando el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos
- Relacionándose con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado

Saber ser

- Proponiendo soluciones de manera colaborativa a ecuaciones cuadráticas, interpretando el resultado en el contexto del problema
- Explicando la solución de ecuaciones cuadráticas para la toma de decisiones, valorando su uso en las problemáticas del entorno

Evaluación diagnóstica

Para darte cuenta de qué tanto sabes sobre los temas que se abordan en este bloque, y qué habilidades o actitudes tienes hacia ellos, contesta las siguientes preguntas. De esta manera también podrás distinguir en cuáles aspectos conviene que enfoques tu aprendizaje.

1. Los factores de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ son _____.

a) $(x+2)(x+1)=0$
b) $(x-2)(x+1)=0$
c) $(x-2)(x-1)=0$
d) $(x+2)(x-1)=0$

2. Las soluciones de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ son _____.

a) $x = 1,\ 2$
b) $x = -1,\ 2$
c) $x = 1,\ -2$
d) $x = -1,\ -2$

3. La gráfica de la expresión $y = ax^2 + {}^{bx} + c$ gráficamente representa _____.

a) una recta
b) una elipse
c) una parábola
b) una circunferencia

4. La gráfica de una función cuadrática corresponde a _____.

a) una catenaria
b) una parábola vertical
c) una parábola horizontal
d) una parábola en diagonal

5. Escribe las formas de ecuaciones cuadráticas que conozcas.

6. ¿Qué características tiene una ecuación cuadrática completa?

7. Menciona dos métodos de solución para las ecuaciones cuadráticas.

8. Explica el significado de las soluciones de una ecuación cuadrátiuca.

Ecuaciones cuadráticas

¿Es lo mismo soltar un objeto desde la parte más alta de un edificio con altura h, que lanzarlo con una velocidad v_0 hacia abajo? ¿Qué diferencia existe en la pregunta anterior? ¿Cómo podemos resolver esta duda? ¿Cómo es la trayectoria del objeto si es lanzado hacia abajo pero con una velocidad horizontal v_0? ¿Puedes responderla? ¿Aún tienes dudas?

En acción

GLOSARIO

Vástago de bambú. Es el tallo con las hojas del bambú; la situación aquí descrita, aparece en un libro de matemáticas chino titulado *Los nueve capítulos del arte matemático*, escrito aproximadamente 250 a. C.

1. Un **vástago de bambú** de 3 metros de largo se rompe de forma tal que su punta toca el suelo a 1 metro de la base, como se muestra en la **Figura 7.1**. ¿Es posible calcular la altura a la que se rompió el vástago?

- Traza un triángulo rectángulo semejante a la figura.
- Dale un nombre a la altura del triángulo.
- Consulta el teorema de Pitágoras.
- ¿Te parece familiar la expresión $x^2 + 1 = (3 - x)^2$?
- Resuelve en equipo la ecuación del paso anterior.

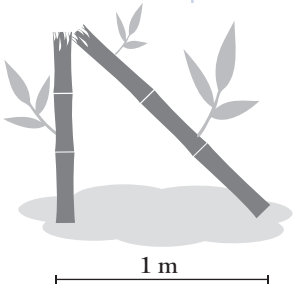


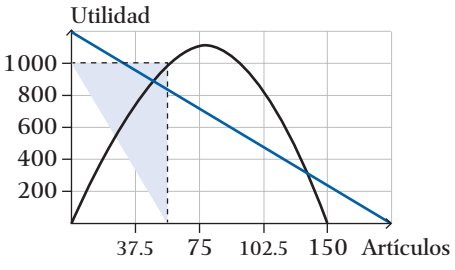
Figura 7.1 Vástago de bambú.

2. Con la asesoría de un ingeniero en matemáticas, un comerciante determina que la utilidad U en dólares generada por las ventas de x artículos por semana está dada por la fórmula:

$$U = \frac{1}{5}x(150 - x)$$

Siempre y cuando $0 \leq x \leq 75$. ¿Cuántos artículos debe vender el comerciante en una semana para obtener una utilidad de 1 000 dólares?

- Igualen, en equipo de cuatro estudiantes, a 1 000 la expresión de la utilidad.
- Resuelvan la ecuación resultante igualando a cero. La clave es encontrar 2 números que sumen −150 y que multiplicados produzcan +5 000.
- Analicen la gráfica siguiente y concluyan si corresponde a la situación que estamos estudiando.
- Si la gráfica representa la situación en cuestión, observen cuál es el valor de x para el que la utilidad es máxima.



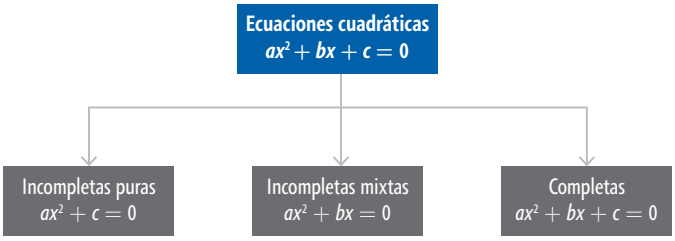
En el bloque anterior estudiamos las ecuaciones lineales, aprendimos en qué consiste un sistema de ecuaciones lineales, tanto de dos como de tres ecuaciones. El objetivo, en términos generales, para este bloque es el mismo: determinar los valores asociados a las variables de tal modo que las ecuaciones cuadráticas se satisfagan, es decir, se cumplan las igualdades correspondientes.
En esta sección resolveremos situaciones donde se presenten problemas cuya solución implique ecuaciones de segundo grado con una incógnita, empleando para ello métodos algebraicos y analíticos para concluir si las soluciones son reales o imaginarias.

Una ecuación cuadrática en x es una ecuación que puede escribirse en su forma estándar como:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$.

Clasificación



Ecuación cuadrática incompleta pura

Se forma por un término elevado al cuadrado más un término independiente igualado a cero. Su forma general es:

$$ax^2 + c = 0, \quad \text{donde,} \quad a \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

Para resolverlas se utiliza el despeje o factorización de una diferencia de cuadrados. Sus soluciones son:

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Ecuación cuadrática incompleta mixta

Tiene un término cuadrático y un término lineal igualados a cero. Su forma general es:

$$ax^2 + bx = 0 \text{ con } a \neq 0 \neq b$$

Para resolverlas utiliza el caso de factorización a través del factor común. Una de sus soluciones siempre será cero.

Ecuación cuadrática completa

Tiene tres términos; cuadrático, lineal e independiente igualados a cero. Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \text{ diferentes de cero}$$

Para resolverlas utiliza la factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

En acción

Clasifica las siguientes ecuaciones según el tipo que sea.

a) $4x^2+12x+8=0$ _____ e) $36-x^2=0$ _____

b) $4x-3x^2=0$ _____ f) $3x^2+24-18x=0$ _____

c) $-6x^2+56x-60=0$ _____ g) $x^2-4=0$ _____

d) $-2x+4x^2=0$ _____ h) $-3x-x^2=0$ _____

Métodos de solución

Propiedad del producto cero

$$ab=0, \quad \text{si y sólo si,} \quad a=0 \quad \text{o} \quad b=0$$

Esta propiedad significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación, entonces la resolveremos igualando a cero cada uno de los factores.

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

1. **Ecuación cuadrática pura.** Resuelve la ecuación siguiente:

$$x^2-5=0$$

Solución

La ecuación $x^2-5=0$ se puede factorizar como una diferencia de cuadrados y, de esta forma, es fácil encontrar las soluciones. Nos apoyaremos con la tabla siguiente para realizar los cálculos correspondientes.

Igualamos la ecuación a 0	Factorizamos	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos
$x^2-5=0$	$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$	$x+\sqrt{5}=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{5}$ $x-\sqrt{5}=0 \Rightarrow x_2=+\sqrt{5}$

Comprobación

Para $x=-\sqrt{5}$, tenemos:

$$\begin{aligned}(-\sqrt{5})^2-5&=0\\(-2.2361)^2-5&=0\\5-5&=0\\0&=0\end{aligned}$$

Para $x=\sqrt{5}$, tenemos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{5})^2-5&=0\\(2.2361)^2-5&=0\\5-5&=0\\0&=0\end{aligned}$$

2. **Ecuación cuadrática mixta.** Resuelve la siguiente ecuación:

$$2x^2-4x=0$$

Solución

La ecuación $2x^2 - 4x = 0$ se puede factorizar como un factor común y, de esta forma, es fácil encontrar las soluciones. Procedemos igual que en el ejemplo anterior.

Igualamos la ecuación a 0	Factorizamos	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos
$2x^2 - 4x = 0$	$2x(x-2) = 0$	$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$

Comprobación

Para $x = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2(0)^2 - 4(0) &= 0 \\ 0 - 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Para $x = 2$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2(2)^2 - 4(2) &= 0 \\ 0 - 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

3. Ecuación cuadrática completa. Resuelve la siguiente ecuación:

$$x^2 + 5x = 24$$

Solución

La ecuación $x^2 + 5x = 24$ se puede factorizar como un trinomio cuadrado con un término común; así, será fácil encontrar las soluciones. Procedemos igual que en el ejemplo anterior.

Igualamos la ecuación a 0	Factorizamos	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos
$x^2 + 5x - 24 = 0$	$(x-3)(x+8)$	$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ $x + 8 = 0 \Rightarrow x_2 = -8$

Comprobación

Para $x = 3$, tenemos:

$$\begin{aligned} (3)^2 + 5(3) - 24 &= 0 \\ 9 + 15 - 24 &= 0 \\ 24 - 24 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Para $x = -8$, tenemos:

$$\begin{aligned} (-8)^2 + 5(-8) - 24 &= 0 \\ 64 - 40 - 24 &= 0 \\ 64 - 64 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Actividad de aprendizaje 1

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CDBM 2

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones factorizando y completando el diagrama. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias.**

1. $x^2 + x = 30$

Igualamos la ecuación a 0	Factorizamos	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos

(Continúa)

(Continuación)

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2vOQ5ql

2. $7x^2 - 56x = 0$

Igualamos la ecuación a 0	Factorizamos	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos

3. $x^2 - x - 6 = 0$

Igualamos la ecuación a 0	Factorizamos	Igualamos cada factor a 0 y resolvemos para cada uno de ellos

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la calculadora para la resolución de ecuaciones cuadráticas (https://bit.ly/2BD7HXu).

GLOSARIO

Modelos matemáticos. Son representaciones de la realidad que sirven para establecer las relaciones entre las variables de una situación o fenómeno. Cuando una de estas variables se representa a través del exponente 2, significa que se está trabajando con una ecuación cuadrática o de segundo grado.

En la vida cotidiana las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado poseen múltiples aplicaciones, como muestra de ello a continuación se te presenta una situación problemática, analiza detenidamente, cómo se construye su **modelo matemático** y cómo se llega a la solución correcta del problema.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Se desea fabricar una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de un trozo cuadrado de cartón, cortando cuadrados de 4 centímetros de lado en cada esquina y doblando los costados, como se muestra en la **Figura 7.2**. La caja debe medir 256 centímetros cúbicos. ¿Cuál es el tamaño de la pieza de cartón para hacer la caja?

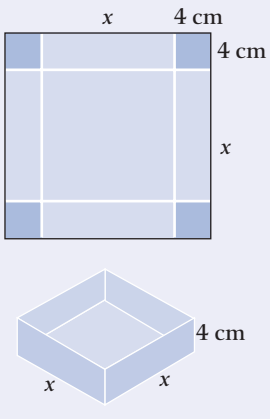


Figura 7.2 Caja con base cuadrada y sin tapa.

Solución

El volumen de la caja es el área de la base x^2 por la altura, que es igual a 4. De tal modo que:

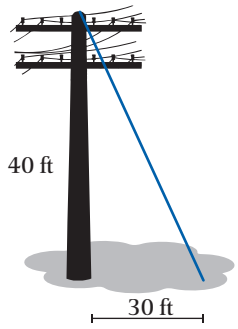
$$V = 4x^2 = 256$$
$$4x^2 = 256$$
$$x^2 = \frac{256}{4} = 64$$
$$x = \sqrt{64} = 8$$

Por lo tanto, la pieza de cartón debe medir $8 + 4 = 12$ cm por lado.

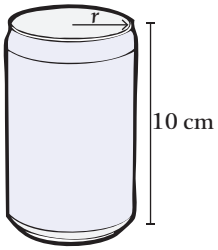
Actividad de aprendizaje 2

Analiza detenidamente las situaciones que a continuación se te presentan y resuelve según corresponda.

1. ¿Qué longitud tiene un alambre que se extiende desde la parte superior de un poste telefónico de 40 ft hasta un punto sobre el suelo a 30 ft del poste?



2. Una lata cilíndrica mide 90π centímetros cúbicos de **volumen** y 10 centímetros de altura. ¿Cuál es su radio?



GLOSARIO

Volumen de un cilindro. El volumen de un cilindro se determina con la fórmula: $V = \pi r^2 h$.

Resolución de una ecuación cuadrática completando el trinomio cuadrado perfecto

Cuando una ecuación cuadrática no se puede factorizar fácilmente, podemos resolverla utilizando la técnica de *completar el cuadrado*. Esto significa sumar una constante a una expresión para convertirla en un cuadrado perfecto. Si tenemos la expresión $x^2 - 4x$ y queremos un cuadrado perfecto, le debemos sumar 4, ya que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

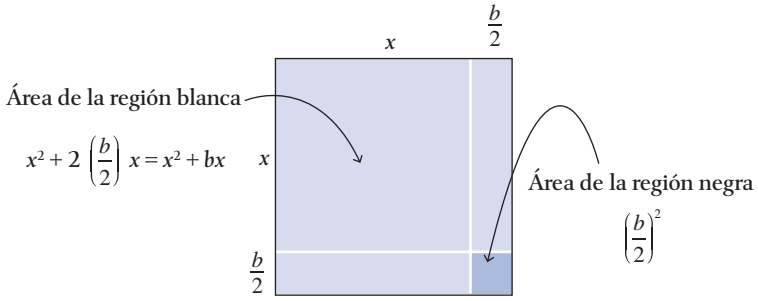
En general, a partir de la identidad:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

se deduce que para hacer de $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto, debemos sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Completando el cuadrado perfecto

Para hacer de $x^2 + bx$ un cuadrado perfecto, basta con sumarle $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Es decir:



Para completar el cuadrado se agrega un pequeño cuadrado de área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ejemplo

Utiliza el método de completar el cuadrado y resuelve la siguiente ecuación.

$x^2 - 8x + 13 = 0$

Solución

Observa la siguiente secuencia para que comprendas el proceso de solución.

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual	Completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos lados de la ecuación	Resuelve la ecuación
$x^2 - 8x = -13$	$x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -13 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$ $x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ $(x-4)^2 = 3$	$(x-4)^2 = 3$ $x - 4 = \sqrt{3}$ $x = 4 \pm \sqrt{3}$

En acción

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. $x^2 - 4x + 2 = 0$

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual	Completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos lados de la ecuación	Resuelve la ecuación

2. $x^2 - 6x - 9 = 0$

Escribe el término numérico a la derecha del signo igual	Completa el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en ambos lados de la ecuación	Resuelve la ecuación

Para corroborar tus resultados puedes acceder a la calculadora para la resolución de ecuaciones cuadráticas (https://bit.ly/2BD7HXu).

Resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general

Hasta este momento te hemos presentado diferentes técnicas o métodos para dar soluciones a distintos tipos de ecuaciones de segundo grado. Ahora veremos el procedimiento para determinar una fórmula general que nos permitirá resolver cualquier tipo de ecuación cuadrática.

Partimos de la ecuación general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Primero, pasamos la constante c al lado derecho y dividimos ambos lados de la ecuación entre a, obtenemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora completamos el cuadrado sumando en ambos lados $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$ Cuadrado perfecto.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$ Simplificamos.

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Obtenemos la raíz cuadrada.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Restamos $\frac{b}{2a}$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Simplificamos.

Fórmula cuadrática

Las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Determina las soluciones de cada ecuación.

1. $3x^2 - 5x - 1 = 0$

Solución

Analiza la secuencia de la tabla siguiente.

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática	Soluciones
$3x^2 - 5x - 1 = 0$ $a = 3,\ \ b = -5,\ \ c = -1$	$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{6}$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$	$x_1 = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} = 1.8471$ $x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} = 0.18046$

2. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Solución

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática	Soluciones
$4x^2 + 12x + 9 = 0$ $a = 4,\ b = 12,\ c = 9$	$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$ $x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8}$ $x = \frac{-12}{8}$	$x = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ En este caso, hay una solución.

3. $x^2 + 2x + 2 = 0$

Solución

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática	Soluciones
$x^2 + 2x + 2 = 0$ $a = 1,\ b = 2,\ c = 2$	$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$	$x_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2}$ $x_2 = -1 \pm \sqrt{-1}$ La solución no existe en los números reales.

Siempre que resolvamos una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, es conveniente observar bien el término $b^2 - 4ac$, que en matemáticas se llama **discriminante**. Como en los ejemplos que acabamos de ver, si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones; si $b^2 - 4ac = 0$, hay una sola solución; y si $b^2 - 4ac < 0$, no hay solución en el campo de los números reales y el resultado se llama *solución imaginaria*. Resumamos lo anterior.

Discriminante

El discriminante de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ es $D = b^2 - 4ac$ y se comporta de la siguiente manera:

1. Si $D > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales.
2. Si $D = 0$, la ecuación tiene una solución real.
3. Si $D > 0$, la ecuación no tiene solución real.

Ahora, observa detalladamente el ejemplo de aplicación de las ecuaciones cuadráticas siguiente.

Ejemplo

Una institución financiera garantiza que por cada $1 000 de inversión, sus clientes recibirán $1 210 al final de 2 años. ¿Cuál es la tasa de interés si se capitaliza anualmente? *Sugerencia*: utiliza la fórmula $A = P(1 + i)^2$.

Solución

Sustituimos el valor de A y P en la ecuación de interés, obtenemos:

$$1210 = 1000(1 + i)^2$$

Despejamos i:

$$(1 + i)^2 = \frac{1210}{1000} = 1.2$$

$$1 + i = \sqrt{1.2}$$

$$i = \sqrt{1.2} - 1 = 0.095$$

Multiplicamos por 100, tenemos:

$$i = 9.5$$

Por lo tanto, la tasa de interés es del 9.5% anual.

En acción

Para cada ecuación determina las soluciones reales, si es que las hay.

1. $x^2 - 2x - 8 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática	Soluciones

(Continúa)

(Continuación)

2. $x^2 + 12x + 27 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática	Soluciones

3. $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

Identifica los valores de *a*, *b* y *c* en la ecuación	Sustituimos *a*, *b* y *c* en la fórmula cuadrática	Soluciones

Resolución de ecuaciones cuadráticas con raíces complejas

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas es el de raíces complejas, en los ejemplos siguientes describiremos en qué consiste. Analiza detalladamente el proceso de solución.

Ejemplo

Obtén la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

Solución

Para dar solución, despejamos x:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1}$$

Como en el campo de los números reales no existe ningún número que al elevarse al cuadrado produzca -1, se concluye que la solución no existe en este campo.

Como lo viste en el ejemplo anterior existen soluciones que no se encuentran en el campo de los números reales. De tal forma que para cumplir con el propósito de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, se inventó un sistema numérico expandido: el sistema de los *números complejos*. Primero, se definió el número:

$$i = \sqrt{-1}$$

De manera que $i^2 = -1$. Por lo tanto, la estructura de un número complejo tiene una parte *real* y otra *imaginaria*. Es decir:

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{Parte imaginaria}}$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La parte real de este número es a y la parte imaginaria es bi.

Con la información anterior podemos resolver de forma distinta, observa el proceso de solución del siguiente ejemplo.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Solución

Para resolver, primero completamos el trinomio y factorizamos:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$
$$(x-3)^2 = -1$$

Despejamos x:

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{-1}$$
$$(x-3) = \sqrt{-1}$$
$$x = \sqrt{-1} + 3$$

Por lo tanto, la solución de x contiene una parte real y una parte imaginaria.

$$x = \underbrace{3}_{\text{Parte real}} \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{\text{Parte imaginaria}}$$

Estructura de una ecuación cuadrática a partir de soluciones reales y complejas

Ejemplo

Escribe una ecuación a partir de las soluciones $x = 3 + \sqrt{-1}$ y $x = 3 - \sqrt{-1}$.

Solución

Para resolver, convertimos las soluciones a ecuaciones, es decir:

$$\text{Como } x = 3 + \sqrt{-1}, \quad \text{por lo tanto,} \quad x - 3 - \sqrt{-1} = 0.$$
$$\text{Como } x = 3 - \sqrt{-1}, \quad \text{por lo tanto,} \quad x - 3 + \sqrt{-1} = 0.$$

Ambas expresiones son cero, por consiguiente, su producto también es cero:

$$\left(x - 3 - \sqrt{-1}\right)\left(x - 3 + \sqrt{-1}\right) = 0$$

Desarrollamos este producto:

$$(x-3)^2 - \left(\sqrt{-1}\right)^2 = 0$$
$$x^2 - 6x + 9 - (-1) = 0$$
$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

Por lo tanto la ecuación que presenta las soluciones $x = 3 + \sqrt{-1}$ y $x = 3 - \sqrt{-1}$, es:

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

Competencias a desarrollar

- CG 5.1
- CG 5.2
- CG 8.2
- CDBM 1
- CDBM 2
- CDBM 4
- CDBM 5

Para resolver la actividad, puedes auxiliarte de:

https://bit.ly/2KcZc7g

Actividad de aprendizaje 3

I. Resuelvan, en equipos de cinco estudiantes, las integrantes cuadráticas que a continuación se presentan, aplicando las técnicas vistas hasta este momento. Esta actividad deberá ir al **Portafolio de evidencias**.

Nota: en los casos que resuelvan utilizar la fórmula general, señalen si existe alguna solución (raíz) inadmisible y justifiquen su respuesta.

1. $5x^2 - 75x = 0$

2. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

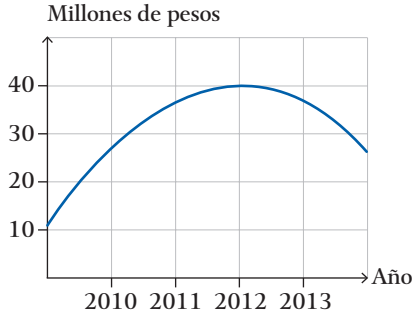
3. Encuentra la ecuación cuadrática correspondiente para las siguientes soluciones: $x = 2 + \sqrt{-1}$ y $x = 2 - \sqrt{-1}$.

II. Analicen las situaciones que a continuación se presentan y resuelvan las ecuaciones cuadráticas con una incógnita, según corresponda. Expliquen cómo llegaron a esas soluciones.

1. La gráfica siguiente muestra las utilidades en millones de pesos de cierta empresa comercial.

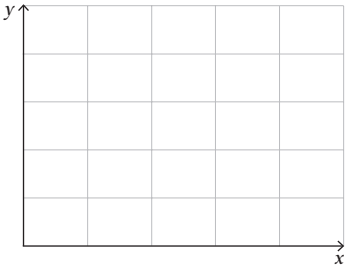
a) ¿En qué año la utilidad fue máxima?

b) Escribe el modelo algebraico de la gráfica utilizando la forma estándar $y = a(x-h)^2 + k$ de la parábola (para determinar, *a* utiliza las coordenadas del vértice (*h*,*k*) y sustituye el valor de *y* en el origen).



2. La trayectoria de una partícula viene dada por la función cuadrática $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, determina los valores de *y* para completar la tabla y con los puntos obtenidos bosqueja la gráfica de la trayectoria.

x	y
0	
2	
4	
6	



Relación entre las funciones y las ecuaciones cuadráticas

Como hemos estudiado a lo largo del bloque, las ecuaciones cuadráticas las encontramos en muchos objetos en movimiento que se encuentran a nuestro alrededor. Las funciones cuadráticas son utilizadas en diversas disciplinas como en la física, economía, biología, arquitectura, ya que son útiles para describir movimientos con aceleración constante, trayectoria de proyectiles, ganancias y costos de empresas, variación de la población de una determinada especie que responde a este tipo de ecuación, y obtener así información sin necesidad de recurrir a la experimentación.

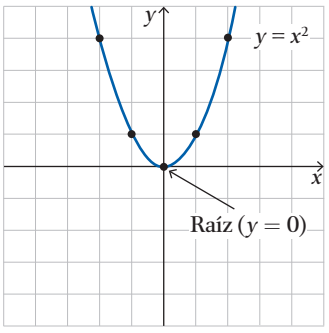
Un ejemplo claro, y que sin duda habrás observado es la trayectoria de un flujo de agua como el de una fuente (**Figura 7.3**), ¿qué forma tiene? Esa trayectoria se conoce como **parábola** y corresponde a la gráfica de una ecuación que llamaremos **función cuadrática** y que tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$. Esta ecuación puede graficarse al igual que la de la línea recta; es decir, asignamos valores a *x* para encontrar los valores correspondientes de *y*.

Figura 7.3 Trayectoria del agua en una fuente.

Cuando $y = 0$, obtenemos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ que hemos venido estudiando hasta ahora.

La forma más sencilla de estas ecuaciones es $y = x^2$. Aquí, $a = 1, b = 0$ y $c = 0$, y la gráfica se obtiene a partir de una tabla como la siguiente:

x	$y = -x^2$	(x,y)
−2	$(-2)^2 = 4$	(−2,4)
−1	$(-1)^2 = 1$	(−1,1)
0	$(0)^2 = 0$	(0,0)
1	$(1)^2 = 1$	(1,1)
2	$(2)^2 = 4$	(2,4)



Se grafican los puntos (x,y) en el sistema coordenado y se dibuja una curva suave que pase por ellos. El resultado es la gráfica de la parábola mostrada en la figura anterior. Por cierto, observa que tiene una sola raíz real o solución, el punto $(0,0)$.

En acción

Investiguen en binas cuál es la relación entre función y ecuación cuadrática, y escriban sus conclusiones en el espacio que se proporciona a continuación.

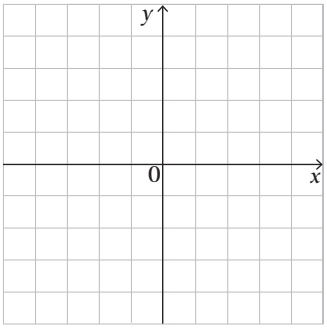
Puedes apoyarte en el siguiente vínculo (https://bit.ly/2tOeerO) para realizar esta actividad.

Parámetros *a*, *b* y *c* en la función cuadrática

Efecto del parámetro *a* en el ancho y la concavidad de la parábola

Marca los puntos incluidos en la tabla que corresponden a la parábola $y = -x^2$ y observa detenidamente lo que ocurre con la gráfica.

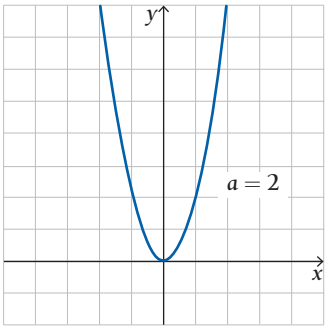
x	$y = -x^2$	(x,y)
-2	$-(-2)^2 = -4$	$(-2,-4)$
-1	$-(-1)^2 = -1$	$(-1,-1)$
0	$(0)^2 = 0$	$(0,0)$
1	$-(1)^2 = -1$	$(1,-1)$
2	$-(2)^2 = -4$	$(2,-4)$



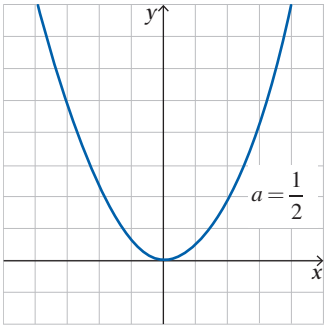
Tu conclusión debe ser que ahora la parábola abre hacia abajo; esto es porque $a < 0$. Por tanto, la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola que:

1. Se abre hacia arriba si $a > 0$.
2. Se abre hacia abajo si $a < 0$.

Ahora reflexiona sobre lo que ocurre cuando a es un número entero o cuando es una fracción.



$y = 2x^2$

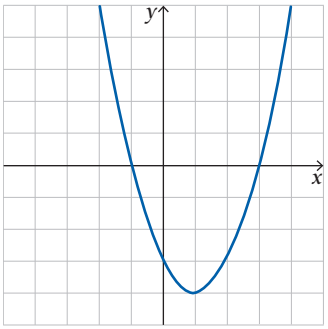


$y = \frac{1}{2}x^2$

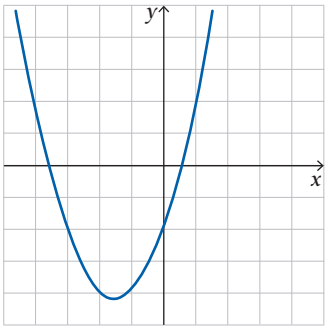
Como puedes ver, si a es un número entero, la gráfica se alarga verticalmente; si a es una fracción, la gráfica se alarga horizontalmente.

Efecto de los parámetros *b* y *c* en la posición de la parábola

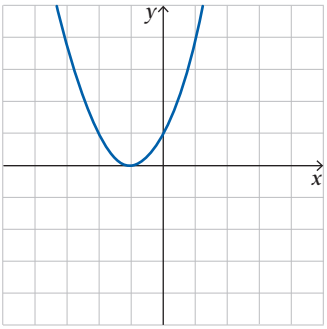
Cuando b y c cambian, independientemente de su valor, lo que ocurre es que el vértice se mueve de su posición original (**Figura 7.4**). Más adelante estudiaremos la importancia que tienen estos parámetros en la solución algebraica (discriminante) de las ecuaciones cuadráticas.



$y = x^2 - 2x - 3$



$y = x^2 + 3x - 2$



$y = x^2 + 2x + 1$

Figura 7.3 Casos que puede presentar una ecuación cuadrática.

Siempre que resolvamos una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$, es conveniente observar bien el término $b^2 - 4ac$, que en matemáticas se llama **discriminante**. Como en los tres ejemplos que acabamos de ver, si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una sola solución.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay solución en el campo de los números reales y el resultado se llama *solución imaginaria.*

Forma estándar de la función cuadrática

Para comprender la forma estándar u ordinaria de la *función cuadrática*, comparemos su ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con el desarrollo de la expresión estándar $y = a(x - h)^2 + k$.

Sabemos que:

$$y = a(x - h)^2 + k$$
$$y = a\left(x^2 - 2xh + h^2\right) + k$$
$$y = ax^2 - 2ahx + \left(ah^2 + k\right)$$
$$y = ax^2 + (-2ah)x + \left(ah^2 + k\right)$$

Si igualamos las dos expresiones, tenemos:

$$y = ax^2 + (-2ah)x + \left(ah^2 + k\right) = ax^2 + bx + c$$

Ahora hacemos $b = -2ah$ y $c = ah^2 + k$, y obtenemos:

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad k = c - ah^2$$

Las coordenadas (h,k) son las coordenadas del vértice de la parábola (**Figura 7.5**) y representan el punto mínimo o máximo, dependiendo de si la concavidad es hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

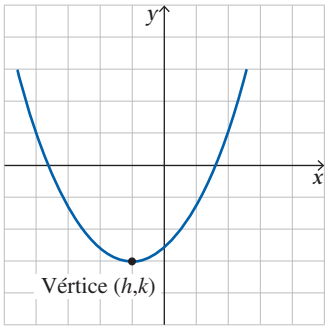


Figura 7.5 Vértice de la parábola.

Ejemplo

Observa detenidamente el proceso de solución, éste te ayudará a resolver ejercicios similares.

Escribe en su forma estándar la función cuadrática $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Solución

Para resolver sabemos que:

$$a = 2,\ b = -4 \text{ y } c = 3$$

De tal forma que:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1$$

$$k = c - ah^2 = 3 - 2(1)^2 = 1$$

El vértice de la parábola se ubica en $V(1,1)$. La parábola abre hacia arriba porque $a > 0$.
La forma estándar de la parábola es:

$$y = 2(x-1)^2 + 1$$

Para elaborar la gráfica correspondiente (**Figura 7.6**), basta con evaluar la función en un valor menor que h y otro mayor. Es decir:

- Si $x = 0$, entonces, $y = 2(0 - 1)^2 + 1 = 3$, por tanto, otro punto de la gráfica es $(0,3)$.
- Si $x = 2$, entonces, $y = 2(2 - 1)^2 + 1 = 3$, por tanto, otro punto de la gráfica es $(2,3)$.

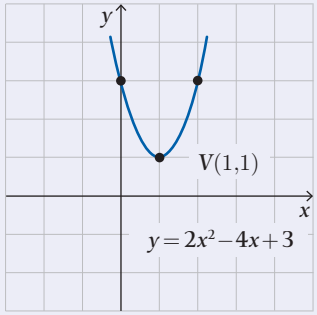


Figura 7.6 Gráfica de la parábola $y = 2x^2 - 4x + 3$.

En acción

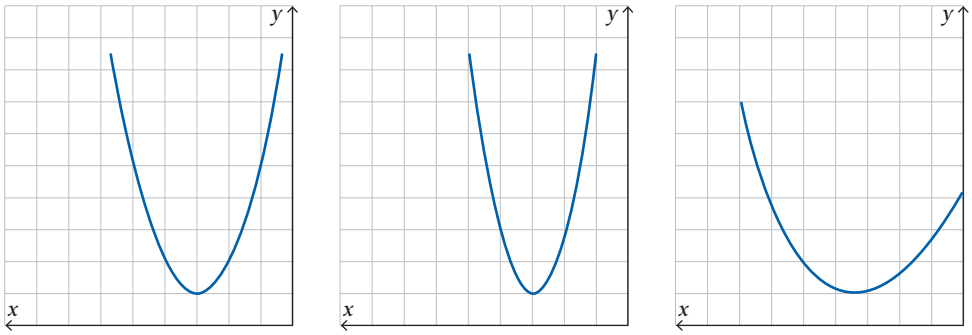
Analiza las situaciones que a continuación se presentan y resuelve según corresponda: convirtiendo la función cuadrática de su forma general a su forma estándar, trazando las gráficas que se solicitan a partir de tabular los valores que consideres necesarios identificando sus parábolas.

1. Sin realizar las gráficas de las funciones, completa la tabla siguiente:

Función	Discriminante de la ecuación respectiva	Número de intersecciones con el eje x	Coordenadas delas raíces
$y = x^2 - 6$			
			$(-16,0)\ (-2,0)$
$y = -4x^2$			
	$D = 32 - 4(1)\ (4)$		

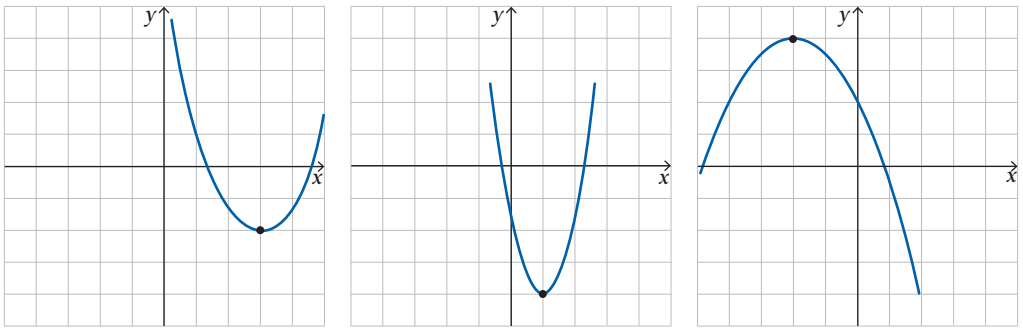
2. Asocia cada función con su gráfica y escríbela en el recuadro correspondiente.

a) $y = x^2 + 6x + 10$ b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$ c) $y = 2x^2 + 12x + 19$



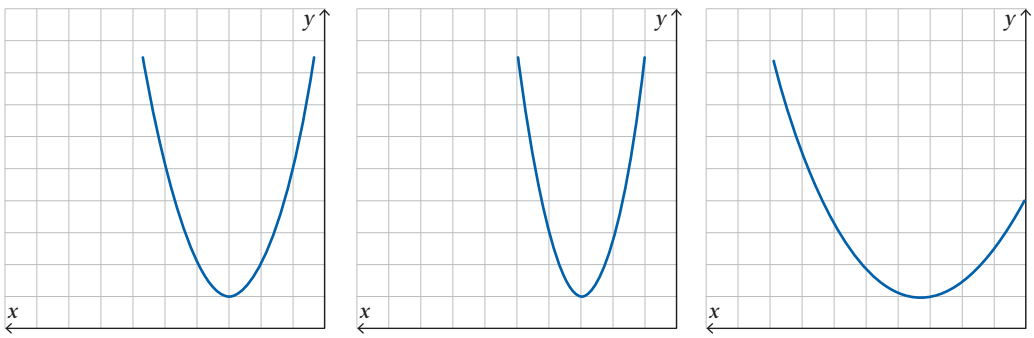
3. Asocia cada función con su gráfica y escríbela en la forma $y = ax^2 + bx + c$ en el recuadro correspondiente.

a) $y = 3(x-1)^2 - 4$ b) $y = (x-3)^2 - 2$ c) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 4$



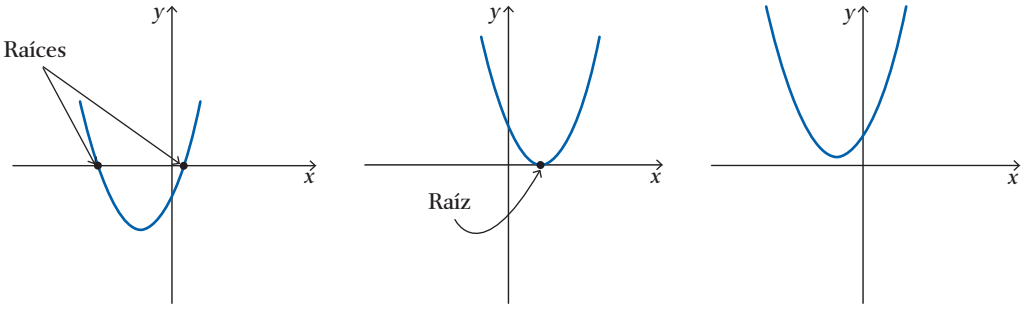
4. Analiza las funciones siguientes, escríbelas en su forma $y = a(x - h)^2 + k$ y coloca tus resultados en el espacio en blanco que aparece en la gráfica correspondiente.

a) $y = x^2 + 6x + 10$ b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$ c) $y = 2x^2 + 12x + 19$



Raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Las figuras siguientes ilustran que cuando una parábola corta dos veces el eje x tiene dos soluciones reales; cuando lo toca una sola vez, tiene una solución real y cuando no lo cruza, no tiene solución. A estas soluciones se les llama **raíces de la ecuación**.



Interpretación de la fórmula cuadrática

Como estudiamos al inicio de este bloque, la técnica de completar el trinomio cuadrado perfecto es muy útil porque nos sirve para obtener las raíces o soluciones de cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y cuando no existe una solución dentro de los números reales, se dice que las raíces son complejas.

En acción

Para validar que recuerdas en qué consiste un número complejo, identifica la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números:

a) $5 + 3i$ _____

b) $2 - 5i$ _____

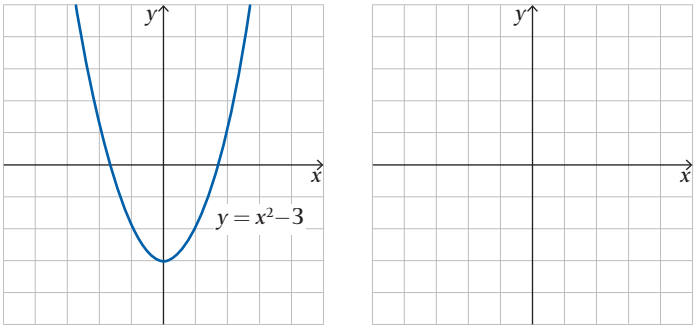
c) $3i$ _____

d) 8 _____

En acción

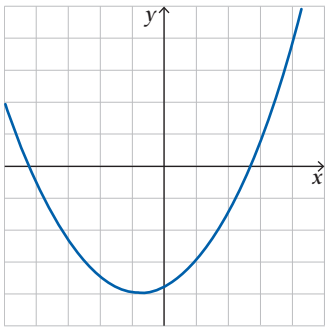
Identifica la naturaleza del discriminante de cada ecuación y determina si sus raíces o soluciones, son reales, imaginarias o complejas.

1. Dada la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 + 3$. Dibuja la gráfica de $y = -x^2 + 3$.

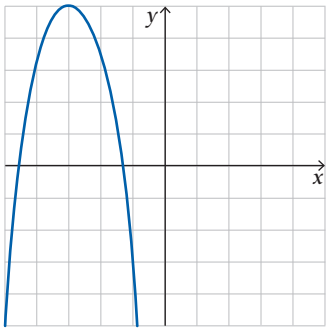


2. Asocia cada función con su gráfica y escríbela en la forma $y = ax^2 + bx + c$ en el recuadro correspondiente. Escribe la solución de cada ecuación.

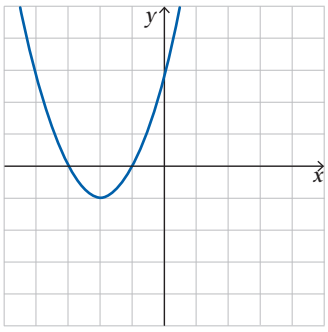
a) $y = (x + 2)^2 - 1$



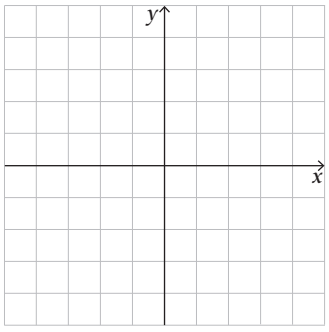
b) $y = \frac{1}{3}(x+1)^2 - 4$



c) $y = -2(x+3)^2 + 5$



3. Dada la función $y = 2x^2 + 4x - 3$ escríbela en su forma $y = a(x - h)^2 + k$ y bosqueja su gráfica. Escribe la solución de $2x^2 + 4x - 3 = 0$.



WEB

Consolida lo aprendido en el bloque realizando lo siguiente: **1.** Revisa y trabaja con las actividades del recurso *Funciones cuadráticas y sus gráficas* (https://bit.ly/2HuOBmu), en ella, en la columna de la izquierda encontrarás los temas a tratar; **2.** Haz equipo con dos compañeros y juntos resuelvan las actividades que vienen en el apartado 3 y 4; **3.** Con lo visto, creen un video y una serie de 5 ejercicios interactivos (usen *GeoGebra* [https://bit.ly/2EZ3rPP] y *ProProfs* [https://bit.ly/2Jpy0C0] o *QuizWorks* [https://bit.ly/2ErnXbC]); **4.** Presenten su video ante el grupo y compartan sus ejercicios con otros equipos para que los resuelvan y los evalúen.

Conexiones

Como ya has descubierto a través de las páginas de este libro, las matemáticas se relacionan con las diversas áreas del conocimiento y con tu vida cotidiana. Es momento que descubras la conexión que guardan Matemáticas 1, Química 1, Taller de lectura y redacción 1 e Informática 1. Para ello, investiga el vínculo que guardan las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, que has abordado durante este bloque, con la teoría cinético-molecular. Con tus hallazgos realiza un resumen y con éste, elabora una presentación multimedia y preséntala ante el grupo.

Para tu presentación multimedia pueden utilizar las herramientas de Prezi, *ThingLink* (https://bit.ly/1darwli), *ZohoShow* (https://bit.ly/2Fj1P3B) o *GoogleSlides*. O bien, pueden escribir textos colaborativos en el muro de *Padlet* (https://bit.ly/298259U).

Habilidad matemática

1. El maestro de Biología presentó a sus alumnos la tabla de crecimiento de una bacteria siguiente, en donde *t* representa el tiempo de crecimiento y *V* la velocidad.

t	4	6	8	10	12
V	2	9	20	35	54

¿Cuál es la ecuación algebraica que representa la relación entre el tiempo y la velocidad de crecimiento de la bacteria?

a) $V = \dfrac{t^2 - 3t}{2}$

b) $V = t^2 - 3t$

c) $V = \dfrac{t(t-2)}{2}$

d) $V = t\left(\dfrac{t-1}{3}\right)$

2. La función $y = 3x^2 - 7x - 2$, convertida a la forma $y = a(x - h)^2 + k$ es:

a) $y = 3\left(x - \dfrac{7}{6}\right)^2 + \dfrac{75}{36}$

b) $y = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{29}{36}$

c) $y = 3(x-7)^2 - 23$

d) $y = 3(x-3)^2 - 36$

SOMOS IGUALES

¿Sabías que tú puedes lograr lo que te propongas si te esfuerzas y luchas por hacer tus sueños realidad? Tal es el caso de Tessy López quien es una investigadora, catedrática y divulgadora mexicana originaria de Guanajuato. Ella estuvo nominada al Premio Nobel gracias a su trabajo en el campo de la nanotecnología y la nanomedicina del cual logró crear un gel capaz de curar el pie diabético. Te invitamos a que leas y conozcas más sobre su historia de vida y las dificultades que tuvo que superar para lograr sus metas ingresando al vínculo de internet siguiente: https://bit.ly/2txZZtH
Posterior a leer su historia socializa tus impresiones con el resto del grupo y juntos den respuesta a las siguientes interrogantes: ¿cómo puedo ser una mejor persona? ¿Cómo seremos una mejor comunidad?

Serie de ejercicios

Traduciendo a lenguaje matemático

1. ¿Cómo se clasifican y cuáles son los métodos de solución para la ecuación cuadrática?

2. ¿Qué significado tiene el signo del discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$?

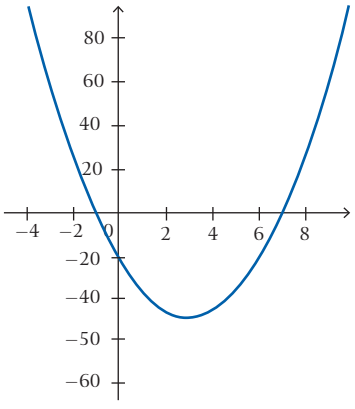
3. Explica los efectos que causan los parámetros a, b y c de una función cuadrática en la forma de la gráfica.

4. ¿Qué indica la cantidad de veces que la gráfica de la función cuadrática corta al eje x?

Matemáticas gráficas

5. Asocia cada función con su gráfica y escríbela en su forma estándar.

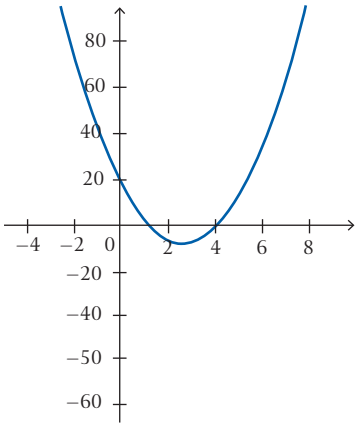
$y = -2x^2 + 8x + 42$



Función:

Forma estándar:

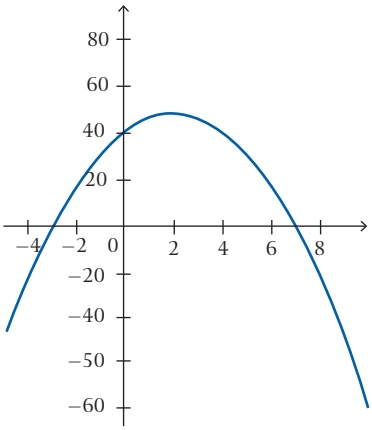
$y = 3x^2 - 18x - 21$



Función:

Forma estándar:

$y = 4x^2 - 20x + 16$



Función:

Forma estándar:

(*Continúa*)

(Continuación)

Ejercicios numéricos

6. Resuelve, en tu cuaderno, las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $-10x^2+8=0$
b) $-5x^2-2=0$
c) $3x^2+10x=0$
d) $-x^2+8x=0$

7. Resuelve, en tu cuaderno, las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

a) $5x^2+15x-20=0$
b) $-4x^2-44x-96=0$
c) $x^2-3x-10=0$
d) $-2x^2-12x+32=0$

8. Resuelve, en tu cuaderno, las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general.

a) $4x^2-52x+160=0$
b) $-4x^2-56x-192=0$
c) $12x^2-30x+12=0$
d) $-5x^2-7x-4=0$
e) $-5x^2-10x+315=0$
f) $-x^2-3x-3=0$

9. Analiza las siguientes funciones y escríbelas, en tu cuaderno, en su forma $y=a(x-h)^2+k$.

a) $y=-5x^2-25x+120$
b) $y=5x^2+10x-175$
c) $y=-4x^2-20x+144$
d) $y=2x^2+8x-90$

10. Determina, en tu cuaderno, las coordenadas del vértice de las siguientes ecuaciones.

a) $y=x^2-x-42$
b) $y=2x^2-34x+144$
c) $y=-x^2-8x-7$
d) $y=-x^2-17x-72$
e) $y=4x^2-24x+32$
f) $y=5x^2+10x-175$

11. Determina, en tu cuaderno, las coordenadas de las raíces de las siguientes ecuaciones.

a) $y=2x^2-4x-70$
b) $y=-3x^2+45x-150$
c) $y=x^2-8x+15$
d) $y=-x^2+5x+36$
e) $y=-3x^2+12x+96$
f) $y=-x^2-x+12$

Problemas de aplicación

12. La ecuación $y=-2x^2-4x+30$ modela el lanzamiento de una pelota. Determina las coordenadas del punto de lanzamiento y la distancia del punto de lanzamiento a la que cae la pelota.

13. Se dispara una camiseta hacia arriba con una pistola de aire. Determina la altura que alcanzara la camiseta si la ecuación que rige el movimiento es $h = -4t^2 - 68t + 280$.

14. Determina cuanto tiempo está en vuelo la camiseta del ejercicio anterior.

15. Se desea construir una fuente que lance chorros de agua en forma de parábola, los cuales deben de alcanzar una altura de 5 metros y caer a una distancia de 6 metros del centro de la fuente. ¿Cuál es la ecuación de la parábola que forman los chorros de agua?

EVALUACIÓN DEL BLOQUE

Autoevaluación

Es momento de evaluar las competencias que desarrollaste en este séptimo bloque, para ello, haremos uso de la siguiente tabla.

Instrucciones: estima tu nivel de logro y contesta con honestidad. Recuerda que esta autoevaluación está diseñada para que conozcas más de ti y de tus logros.

3 Lo puedo enseñar a otros 2 Los puedo hacer solo 1 Necesito ayuda

Aprendizaje esperado	1	2	3	Qué debo hacer para mejorar:
Propongo soluciones de manera colaborativa a ecuaciones cuadráticas, interpretando el resultado en el contexto del problema.				
Explico la solución de ecuaciones cuadráticas para la toma de decisiones, valorando su uso en las problemáticas del entorno.				

Ahora que has contestado la autoevaluación, eres capaz de identificar tu nivel de logro conforme a los aprendizajes esperados. Te invitamos a que socialices tus resultados con tu maestro, quizá necesites de alguna orientación específica para resolver posibles dudas, o mejor aún, es posible que estés listo para ayudar a tus compañeros.

Coevaluación

Instrucciones: evalúa el trabajo que realizó cada compañero de tu equipo cuando participaron en las Actividades de aprendizaje y En acción.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.

Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Heteroevaluación

En la página 341 encontrarás una serie de preguntas que permitirán que tu profesor evalúe los conocimientos que adquiriste en este bloque. Respóndelas, recorta la hoja y entrégala a tu profesor.

Evaluación de actividades de aprendizaje y portafolio de evidencias

La siguiente es una lista de actividades que le ayudarán a tu profesor a evaluar el trabajo que realizaste durante este bloque. En la página 309 encontrarás algunos modelos de los instrumentos de evaluación que utilizará.

Actividad	Evidencia	Ubicación	Instrumento de evaluación
Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones factorizando y completando el diagrama.	Problemas resueltos.	Pág. 247.	Lista de cotejo y problemario.
Analiza detenidamente las situaciones que a continuación se te presentan y resuelve según corresponda.	Problemas resueltos.	Pág. 249.	Prueba objetiva y rúbrica.
Resuelvan, en equipos de cinco estudiantes, las ecuaciones cuadráticas que a continuación se presentan, aplicando las técnicas vistas a lo largo de este bloque.	Problemas resueltos.	Pág. 256.	Prueba objetiva y rúbrica.

Lección 1 ¿Quién soy y qué valoro?

Objetivo general: Identificar aspectos relevantes de su identidad. Como sus valores, logros, fortalezas, debilidades y redes de apoyo.

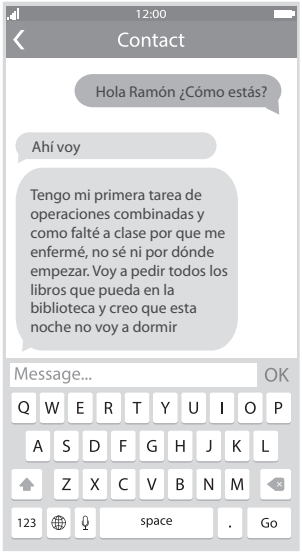
1.6 Puedo buscar ayuda

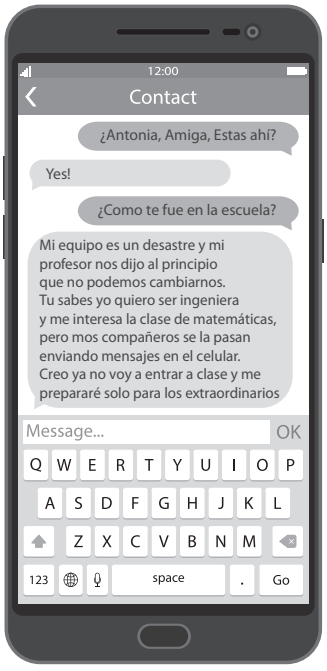
Objetivo específico: Identificar la importancia de pedir ayuda y reconocer los miembros de mi red de apoyo.

Introducción: ¡Otra vez un problema que resolver! La semana pasada lo de la tarea en equipo, ayer el asunto de no poder imprimir, hoy hay que resolver con la directora el tema de la pelea de Julia y Alan, ¿qué será mañana? Seguramente ya te habrás dado cuenta de que no podrás evitar enfrentarte a múltiples obstáculos para lograr tus metas personales y académicas. ¿Te has puesto a pensar que en muchas ocasiones resulta muy útil pedir ayuda a otros? ¿A quién le podrías pedir ayuda?

1. Escribe una situación o problema que te preocupa relacionado con tu clase de Matemáticas o la escuela en general.

2. En equipos de tres integrantes comenten qué les recomendarían a los siguientes estudiantes:





3. Probablemente algunas de las recomendaciones para Mario y Antonieta estaban relacionadas con pedir ayuda. Anoten dos desventajas de resolver el problema solos y dos ventajas de pedir ayuda.

Desventaja 1: _____

_____

Desventaja 2: _____

_____

Ventaja 1: _____

_____

Ventaja 2: _____

_____

4. Regresa al problema que escribiste en el ejercicio 1. Reflexiona y responde:

- ¿A quién le puedo pedir ayuda para resolver este problema?

_____

_____

- ¿Qué tipo de ayuda le puedo pedir?

_____

_____

5. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

_____

_____

_____

_____

¿Quieres saber más?

Si te cuesta trabajo pedir ayuda, puedes buscar el video titulado "El arte perdido de pedir ayuda", disponible en la liga: https://bit.ly/2HIDCeO.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 1.6. Puedo buscar ayuda. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion1/1.6_E_04.10_MATEMATICAS_Puedo-buscar-ayuda-v2.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 2 ¿Cuáles son mis metas?

Objetivo general: Establecer metas académicas y personales a corto, mediano y largo plazo.

2.6 Mis metas académicas

Objetivo específico: Reconocer que toda tarea difícil se puede dividir en tareas más sencillas.

Introducción: Sábado: ¡En una semana es mi examen de matemáticas! ¿Y si no termino los ejercicios? ¿Y si me va muy mal? ¿Y si por culpa de esta materia se enojan conmigo mis papás? Uff..., respira Margarita ¡Sí puedes! ¡Has aprobado otros exámenes más difíciles antes! Mi plan es: hacer todos los ejercicios con tiempo.

Domingo:...

Lunes:...

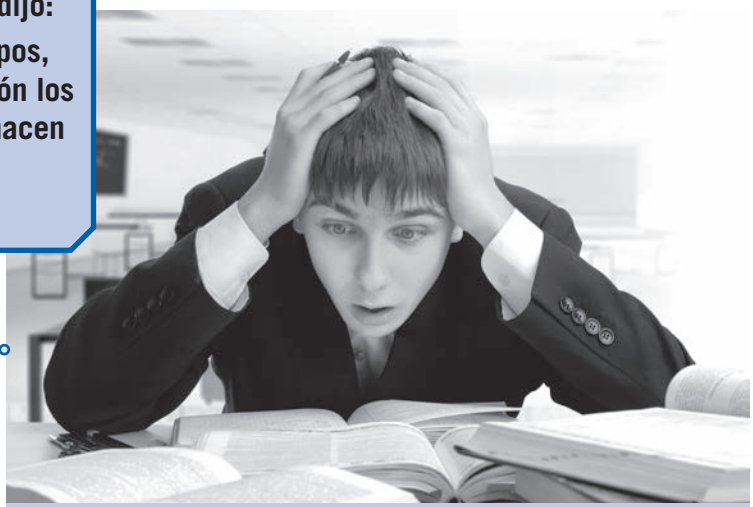
Martes: ¡Tengo que empezar con los ejercicios de mate! Hoy le dedico a la tarea de historia que urge. Mañana empiezo sin falta.

Miércoles:...

Jueves: Mañana es el examen. Otra vez me pasó lo mismo. En una tarde no puedo con todo. Bueno, intentaré hacerlo mejor para el próximo examen.
¿Te ha pasado que cuando intentas alcanzar una meta te cuesta mucho organizar el trabajo para alcanzarla? ¿Te has preguntado si tus metas son difíciles de alcanzar? ¿Sabes lo que es una estrategia?

1. En equipos de tres o cuatro, observen a Rodrigo en su primer día de clases.

...entonces para aprobar, el profe dijo: tres exámenes, un proyecto en grupos, la tarea de los viernes, autoevaluación los lunes, las prácticas de los TICs se hacen los miércoles y ... ¿me falta otra cosa?¿Cuál era?



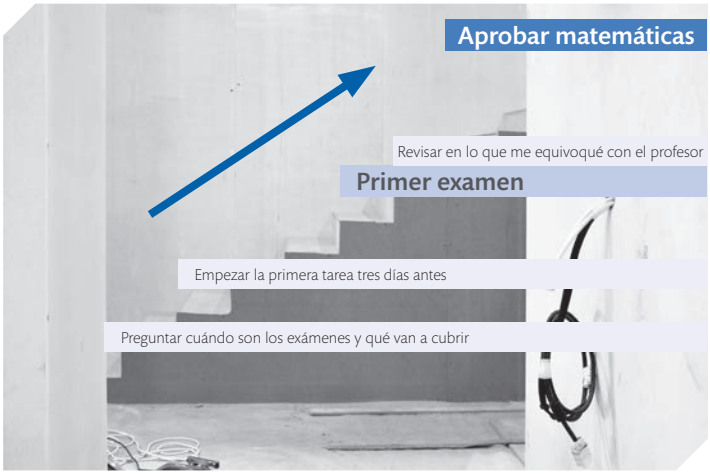
La primera clase de matemáticas de Rodrigo

2. Reflexionen y respondan. ¿Qué piensan que siente Rodrigo?

3. ¿Les ha pasado a ustedes una situación similar? Descríbanla brevemente.

4. Discutan la relación que encuentran entre sus respuestas y la frase de Lao Tse: “Todo viaje por largo que sea, empieza por un solo paso.”

5. Escribe en los escalones cuáles serían los pasos que te llevarían a aprobar matemáticas y colorea el escalón que sea más significativo para ti. Explica.



6. Explica a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

¿Piensas que memorizar los procedimientos y fórmulas te ayuda a aprobar matemáticas? Consulta en YouTube el video titulado “Una historia de reconocimiento”, de Eduardo Sáenz, accediendo a la liga:

https://bit.ly/2HLBa4R.

El video muestra algunos aspectos que te ayudarán a comprender un poco más sobre cómo los matemáticos conciben un problema.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 2.6. Mis metas académicas. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion2/2.6_E_22.10_Mis_metas_academicas_matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 3 ¿Qué me impide o ayuda a alcanzar mis metas?

Objetivo general: Identificar obstáculos internos y externos para lograr sus metas.

3.6 ¿Cómo trabajo con mis obstáculos?

Objetivo específico: Usar la estrategia de MEROP para lograr una meta a corto plazo.

Introducción: Imagina que el día de hoy es tu examen de matemáticas, tuviste un mes para prepararte y no lo hiciste ¿Te ha pasado algo similar? En esta lección conoceremos una estrategia para alcanzar metas. Se llama MEROP. A continuación te lo explico en un ejemplo:

Meta: Entregar mi tarea completa.
Resultado: Feliz, confiado, satisfecho por ser capaz de entregar la tarea bien y a tiempo.
Obstáculo: Me distraigo con mi celular.
Plan: Si en la tarde me distraigo con mi celular, entonces voy a ponerlo en silencio y lo voy a guardar. ¡Anímate a aplicarlo!

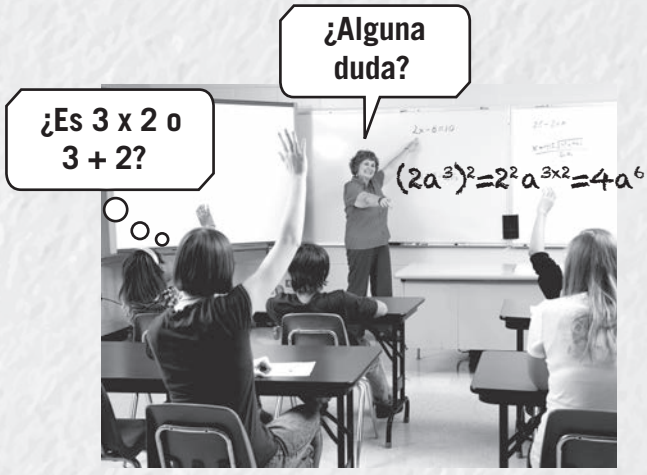
1. En grupos de tres o cuatro, analicen la historia de Juan y respondan a las preguntas.

21 de octubre
Nombre: Juán Sánchez

Examen de Matemáticas

$-3 + (-x) = -3 + x$ ✗

No aprovado



21 de sptiembre
Nombre: Juán Sánchez

Examen de Matemáticas

$(x^2)^5 = x^7$ ✗

No aprovado

21 de sptiembre
Nombre: Juán Sánchez

Examen de Matemáticas

$5x = x + 4$
$5x - x = 4$
$4x = 4$
$x = 4 - 4 = 0$

X

No aprovado

2. La meta de Juan es aprobar matemáticas. Comenten en equipo: ¿Cómo se sentiría si aprobara? ¿Qué le impide a Juan aprobar los exámenes? ¿Qué le recomendarían que haga?

3. Para el siguiente curso Juan llenó su tarjeta MEROP. Léela.

ME
R
O
P

Mi meta es: *Aprobar el primer exámen*
Mejor resultado: *Aprobar el primer exámen*
Obstáculo: *Quedarme con dudas*
Plan:

Si *Tengo dudas en la clase de matemáticas* entonces voy a *Levantar la mano y preguntar hasta que me quede claro*

Obstáculo (cuándo y dónde) — Acción (para vender el obstáculo)

4. Ahora completa la tuya.

ME
R
O
P

Mi meta es: _____
Mejor resultado: _____
Obstáculo: _____
Plan:

Si _____ entonces voy a _____

Obstáculo (cuándo y dónde) — Acción (para vender el obstáculo)

5. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

_____

_____

¿Quieres saber más?

¿Sabías que la estrategia de MEROP (WOOP por sus siglas en inglés) permitió potenciar un sesenta por ciento el esfuerzo de los estudiantes de una escuela a la hora de presentar sus exámenes? Para saber más sobre la historia, la ciencia y los beneficios de usar MEROP busca en Google "*woop my life*", y selecciona la opción español o accede a la liga: https://bit.ly/2Kc7vQM.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 2.6. Lección 3.6 ¿Cómo trabajo con mis obstáculos? *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion3/3.6._E_Como_trabajo_con_mis_obstaculos.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 4 ¿Qué es la atención?

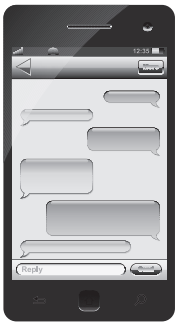
Objetivo general: Expresar con sus palabras qué es la atención y cuáles son los beneficios de entrenarla.

4.6 La mente-chango

Objetivo: Reconocer momentos en los cuales la mente está distraída y agitada.

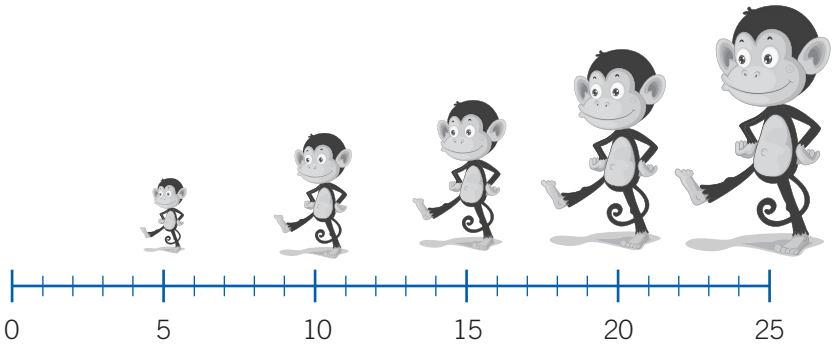
Introducción: ¿Qué dirías sobre tu habilidad de poner atención? ¿Crees que es un problema para ti en la escuela o logras concentrarte con facilidad? Cuando comencemos a observar cómo opera nuestra atención notaremos que es inquieta y caprichosa, muchas veces se comporta como un chango que salta de un lado a otro sin que nosotros siquiera nos demos cuenta de ello. En esta lección exploraremos a qué nos referimos con la "mente-chango".

1. Las siguientes ilustraciones muestran ejemplos de situaciones donde nuestra mente se puede estar comportando como un chango. Haz una autoevaluación: ¿qué puntaje te pondrías si tuvieras que evaluarte del 1 al 5? El 1 corresponde a nunca y el 5 a muy frecuentemente.

ilustración	Situación	Nunca	Casi Nunca	Algunas veces	Frecuente-mente	Muy frecuente-mente
	La maestra está explicando algo y yo no la escucho, estoy pensando en otra cosa.	1	2	3	4	5
	Un pensamiento de algo que me preocupa se va haciendo más grande en mi mente hasta convertirse —en mi mente— en una trajedia	1	2	3	4	5
	Un momento estoy haciendo la tares y al siguiente estoy haciendo cualquier cosa, como ver mi cel.	1	2	3	4	5

	Estoy en el salón, pero estoy pensando en lo que hice antes o en lo que voy a hacer después de clase.	1	2	3	4	5
	Estoy intentando estudiar para el examen y mi mente está agitada, con ruido interno, no se calla, pasa de un pensamiento a otro no me deja estudiar	1	2	3	4	5

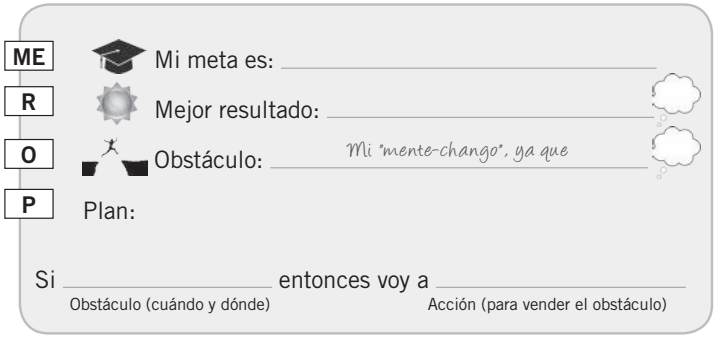
a) Una vez completada la actividad suma los puntos de cada apartado. ¿Cuántos puntos obtuviste? Marca la cantidad de puntos que obtuviste al sumar tus respuestas y ubícala sobre la siguiente recta.



Entre mayor sea el puntaje que las personas obtienen, mayor es la frecuencia en que la mente está distraída y agitada. La mayoría de las personas obtenemos puntajes altos pues la mente, cuando no está muy entrenada, salta de una cosa a otra como ¡un chango! Por eso decimos que hay muchos momentos en que nuestra mente se comporta como una "mente-chango".

2. Discute con tus compañeros ¿qué tipo de problemas puede generar la "mente-chango"?

3. Tener una mente distraída y agitada puede traernos problemas y ser un obstáculo en el logro de nuestras metas. Elige una meta que desees cumplir, puede ser la misma de la semana pasada. Imagina cómo es que la "mente-chango" podría convertirse en un obstáculo para lograrla. Completa la tarjeta MEROP con los espacios que faltan.



4. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

_____

_____

¿Quieres saber más?

¿Quieres entrenar a tu mente para que no esté distraída y agitada, saltando de una cosa a otra como la "mente-chango"? Como sugerencia para ello, te invitamos a conocer los estudios de la neurocientífica Sara Lazar sobre el entrenamiento mental. Búscalo en YouTube con el título "*How Meditation Can Reshape Our Brains*: Sara Lazar at TEDxCambridge 2011", o accede a la liga: https://bit.ly/2JkoZJw.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 2.6. Lección 4.6 La mente-chango. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion4/4.6_E_La_mente_de_chango_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 5. La importancia de las emociones en mi vida

Objetivo general: Expresar con sus palabras la importancia de las emociones en su bienestar, en sus relaciones y la posibilidad de trabajar con ellas.

5.6 Las emociones en la escuela

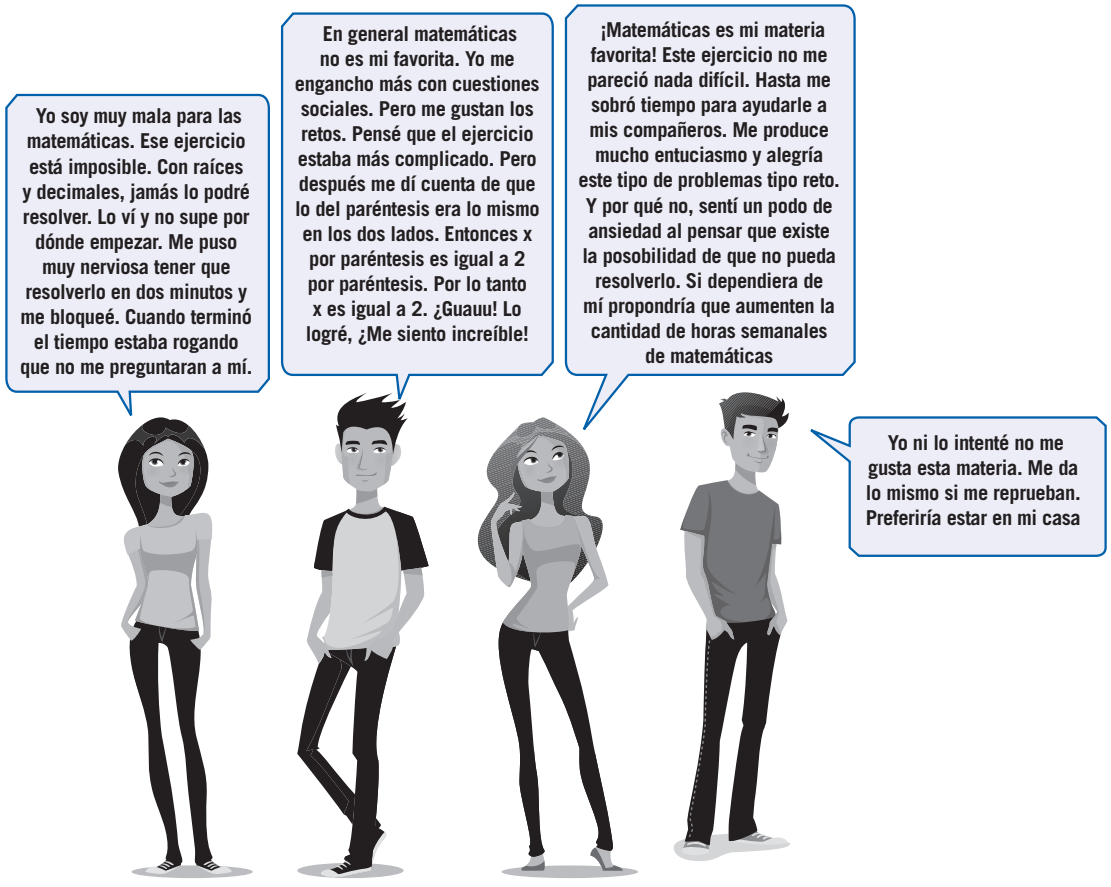
Objetivo específico: Reconocer mis emociones en clase e identificar cómo afectan mi aprendizaje.

Introducción: ¿Te ha pasado que te sientes con mucha ansiedad y angustiado antes de un examen? ¿Has sentido entusiasmo o emoción con alguna actividad que te propusieron en clase? ¿Te has aburrido en clase? ¿Has experimentado frustración por haberte esforzado en alguna tarea y no haber logrado lo que esperabas? En esta actividad te proponemos que analices qué emociones sientes en tu clase de matemáticas. ¿Crees que son eventos frecuentes o que ocurren de vez en cuando?

1. Resuelve la siguiente ecuación en dos minutos:

$$x\left(-\frac{-2^{-\frac{3}{5}}}{5-\sqrt[3]{\frac{0.4}{0.\overline{3}-\frac{1}{5}}}}\right)=2\left(-\frac{-2^{-\frac{3}{5}}}{5-\sqrt[3]{\frac{0.4}{0.\overline{3}-\frac{1}{5}}}}\right)$$

2. Lee los comentarios de cuatro estudiantes:



I. Completa el tuyo anotando lo que sentiste cuando empezaste a resolverlo

3. Comenten en equipos de tres o cuatro integrantes.

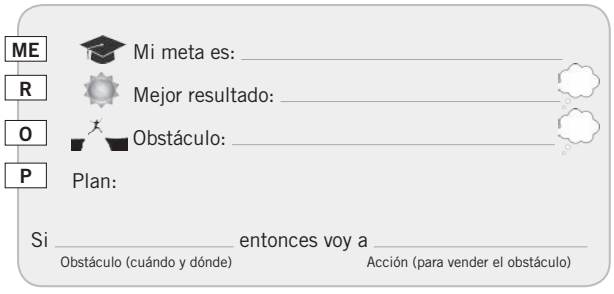
a) ¿Qué emociones sienten en la clase de matemáticas?

b) ¿Consideran que hay emociones que ayudan al aprendizaje de ciertos temas en matemáticas y otras que lo dificultan? ¿Puedes escribir un ejemplo de cada una?

Ayudan: _____

Dificultan: _____

4. Llena una nueva tarjeta MEROP para trabajar en esta semana. Reflexiona si hay emociones que pueden ser un obstáculo para lograr tu meta. La meta puede ser la misma de la clase anterior u otra. Tú decides.



5. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

_____

_____

¿Quieres saber más?

En la entrevista "La neurociencia afectiva cultiva el bienestar de docentes y estudiantes", el doctor Richard Davidson habla acerca de la importancia de cultivar el bienestar en los estudiantes y docentes, conoce más al respecto accediendo a la liga: https://bit.ly/2HolwsQ.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 2.6. Lección 5.6 Las emociones en la escuela. *Construye-T*. Recuperado de https://www.educaciontrespuntocero.com/entrevistas/richard-davidson-neurociencia-afectiva/51462.html (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 6 La ciencia detrás de las emociones

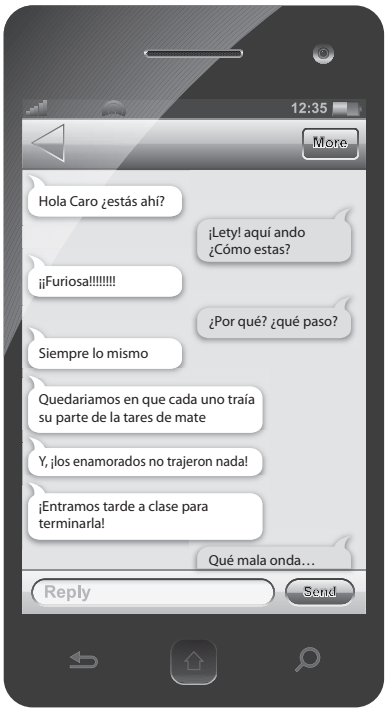
Objetivo general: Conocer qué son las emociones, cuál es su función, cuáles son sus componentes y cómo se desarrolla un episodio emocional.

6.6 Componentes de una emoción

Objetivo específico: Identificar los tres componentes del proceso emocional.

Introducción: Las emociones se viven y expresan a través de lo que pensamos, lo que sentimos y lo que hacemos. En esta lección conoceremos con más detalles estos tres componentes de las emociones.

1. En equipo, lean el siguiente chat:



a) Completen:

¿Qué pasó? Describan con sus propias palabras la situación.	**¿Qué consideran que pensó Lety?** Escriban ejemplos de los pensamientos que pasaban por su cabeza.	**¿Qué considerán que sintió Lety ?** Piensen en comó se expresa el enojo en el cuerpo, comó se siente en el estómago o en el rostro.	**¿Cómo considerán que se comporto Lety con "los enamorados"?**

b) Recuerda cómo te sientes cuando tienes que hacer un examen de matemáticas. Con base en tus experiencias previas completa la tabla:

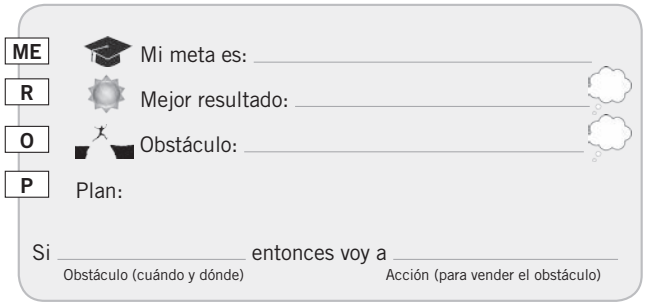
¿Qué pasó? Describan con sus propias palabras la situación.	**¿Qué consideran que pensó Lety?** Escriban ejemplos de los pensamientos que pasaban por su cabeza.	**¿Qué considerán que sintió Lety ?** Piensen en comó se expresa el enojo en el cuerpo, comó se siente en el estómago o en el rostro.	**¿Cómo considerán que se comporto Lety con "los enamorados"?**

2. ¿Qué relación hay entre lo que pensamos, lo que sentimos y lo que hacemos?

3. Haz una pausa. Toma unos minutos para revisar tu última tarjeta MEROP.

a) Escribe una frase que describa cómo te fue al utilizar la estrategia MEROP (por ejemplo, me dio resultado, se me olvidó, me di cuenta que era una meta imposible, logré mi meta, creo que el obstáculo era otro, etcétera).

b) Llena una nueva tarjeta para trabajar en esta semana. La meta puede ser la misma u otra. Tú decides.



4. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

Aunque no todas las personas sentimos enojo bajo las mismas circunstancias ni lo expresamos de la misma manera, el enojo tiene características muy particulares que se manifiestan en nuestro cerebro, en el cuerpo y en el tipo de pensamientos y conductas que tenemos. Para entender mejor qué sucede cuando te enojas consulta en YouTube el video titulado "¿Qué sucede dentro de nosotros cuando sentimos enojo?", o accede a la liga: https://bit.ly/2K76jxX.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 2.6. Lección 6.6 Componentes de una emoción. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion6/6.6_E_Componentes_de_una_emocion_Matematicas.pdf] (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 7 Estrategias para trabajar con la atención

Objetivo general: Aplicar estrategias para entrenar la atención.

7.6 Técnicas de relajación

Objetivo específico: Conocer qué son las emociones, cuál es su función, cuáles son sus componentes y cómo se desarrolla un episodio emocional.

Introducción: Hoy estoy visitando a Ana, ¿puedes adivinar quién soy?

—Hola. Soy Ana. Mañana es mi examen. Aún no empiezo a estudiar. Son muchos temas. Algunos no los domino bien. Quizá no pueda con todos. Creo que voy a reprobar y para colmo me duele el cuello. Preferiría no estar en esta situación. Anoche dormí mal. Esta materia no debería existir.
¿Adivinaste? ¡Soy el estrés! ¿Quieres que me vaya? ¡Pues relájate!
Decir: ¡Relájate! Es muy fácil. Pero, ¿qué podemos hacer para relajarnos? En esta lección trabajaremos una estrategia para relajarte y soltar el estrés.

1. Marca con una X en el estresómetro qué tan estresado te sientes en las situaciones presentadas. En el espacio en blanco puedes escribir o dibujar otra situación que te resulte estresante.

Tengo que pedirle algo a papá/mamá						
Muy relajado	Relajado	Un poco relajado	Normal	Un poco estresado	Estresado	Muy estresado

Es viernes tengo plan para el fin de semana y me pusieron un tares muy larga para el lunes						
Muy relajado	Relajado	Un poco relajado	Normal	Un poco estresado	Estresado	Muy estresado

Mañana tengo examen de matemáticas						
Muy relajado	Relajado	Un poco relajado	Normal	Un poco estresado	Estresado	Muy estresado

Mandé un mensaje a un amigo hace 5 minutos u aún no me responde						
Muy relajado	Relajado	Un poco relajado	Normal	Un poco estresado	Estresado	Muy estresado

2. Escaneo del cuerpo.

a) Marca en el estresómetro qué tan estresado te sientes en este momento.

Muy relajado	Relajado	Un poco relajado	Normal	Un poco estresado	Estresado	Muy estresado

b) Ahora escucha las instrucciones de tu profesor. Él te guiará en la técnica de escaneo del cuerpo que sirve para relajarte.

- Acuéstate boca arriba o siéntate cómodamente en tu silla. Si estás acostado, coloca los brazos junto a tu cuerpo y extiende las piernas. Si estás sentado, mantén la espalda recta. Cierra suavemente los ojos.
- Haz tres respiraciones profundas para relajar tu cuerpo y mente.
- Después, recorre tu cuerpo de la cabeza a los pies. Nota si hay puntos de tensión.
- Al exhalar, relaja y libera cualquier tensión acumulada en el cuerpo. Relaja con cada exhalación los músculos de tu cabeza, cara, cuello, hombros, brazos, manos, pecho, abdomen, etcétera.
- Siente todo tu cuerpo suelto, relajado.
- Cuando termines de recorrer y relajar el cuerpo, nota las sensaciones del respirar en todo el cuerpo e imagina que la respiración masajea y relaja cualquier parte del cuerpo que siga tensa.
- Luego, descansa, abre tus ojos y levántate poco a poco.

c) Nuevamente anota en el estresómetro tu nivel de estrés.

Muy relajado	Relajado	Un poco relajado	Normal	Un poco estresado	Estresado	Muy estresado

Si no te puedes relajar no te preocupes. Probablemente estás haciendo mucho esfuerzo, esto puede ser contraproducente y generar más tensión. En este caso te recomendamos aceptar que no te puedes relajar. Aceptar que no te puedes relajar es, de hecho, una forma de relajarte.

3. Socializa en plenaria grupal:

a) ¿Qué cambió después de hacer el ejercicio?

b) Dos situaciones en la que pienses que puede ser útil realizar este ejercicio.

4. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

Desde 1971 se han realizado numerosos estudios sobre la respuesta del cuerpo a los ejercicios de relajación y se han encontrado los siguientes beneficios:

- Baja la presión arterial.
- Mejora la circulación sanguínea.
- Reduce la frecuencia cardiaca.
- La frecuencia respiratoria es más calmada.
- Reduce la ansiedad.
- Reduce los niveles de cortisol (hormona del estrés) en sangre.
- Aumentan los sentimientos de bienestar.
- Reduce el estrés.

Puedes ver el video "Estrés en estudiantes", que a pesar de referirse a universitarios, también se asocia a tu experiencia como estudiante de educación media superior. En éste se presentan algunas estrategias sencillas y fáciles de llevar a cabo para lidiar con el estrés. Puedes buscar el video en YouTube o acceder a la liga: https://bit.ly/2HM7vZb.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). 2.6. Lección 7.6 Técnicas de relajación. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion7/7.6_E_Tecnicas_de_relajacion_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 8 La posibilidad de cambiar mi mundo interno

Objetivo general: Reconocer la posibilidad de transformar su mundo interno.

8.6 Aprender del fracaso

Objetivo específico: Reconocer en los fracasos, oportunidades de crecimiento.

Introducción: Alberto aprendió a hablar hasta los tres años de edad. Sus maestros de la escuela pensaron que tenía problemas de aprendizaje. Un profesor de primaria le dijo que nunca conseguiría nada en la vida. A los 16 años intentó ingresar a la universidad, pero no pudo por sus malos resultados en una materia. Ingresó al año siguiente y se matriculó en el área de ciencias y matemáticas. Tras graduarse no encontró trabajo como profesor. Tuvo que trabajar en una oficina para mantenerse. ¡Pobre Alberto! Probablemente muchos estarán de acuerdo con que este joven ha fracasado en su vida. ¡Esperen, aún no termina la historia! Sigamos. Alberto no se dio por vencido. Trabajó duro por muchos años y en 1921 ganó el premio Nobel de Física. ¿Has escuchado hablar de Albert Einstein?

1. Piensa en alguna ocasión en que sentiste el fracaso. Por ejemplo, cuando tras haber estudiado mucho, reprobaste o sacaste una calificación baja en el examen de matemáticas. ¿Cómo te sentiste? ¿Qué hiciste? _____

_____

2. En equipos de tres integrantes, lean el extracto del discurso de J. K. Rowling, la autora de la saga de Harry Potter.

"Creo que es justo decir que bajo cualquier parámetro convencional, siete años después del día de mi graduación, yo había fracasado en una escala épica. Mi excepcionalmente corto matrimonio había explotado, no tenía trabajo, era una madre soltera y era tan pobre como se puede llegar a serlo en Gran Bretaña sin estar en situación de calle. Los miedos que tanto mis padres como yo misma teníamos sobre mi futuro se hicieron realidad: desde cualquier perspectiva yo era el fracaso más grande del que tenía noticia.

Ahora bien, no me voy a parar frente a ustedes y decirles que el fracaso es divertido. Ese periodo de mi vida fue uno muy oscuro [...] Entonces, ¿por qué hablar sobre los beneficios del fracaso? Simplemente, porque fracasar significa remover todo lo que no es esencial. Dejé de pretender que era algo diferente a lo que yo era y comencé a dirigir toda mi energía a concluir el único trabajo que realmente me importaba [...] El fracaso me enseñó cosas sobre mí misma que no habría podido aprender de otra manera. Descubrí que tengo una fuerza de voluntad férrea y más disciplina de la que había sospechado; también me di cuenta de que tenía amigos cuyo valor era superior al precio de los rubíes. El entendimiento que surge en ti a partir de sobreponerte a los obstáculos te hace más sabia y fuerte, de ese punto en adelante, te da seguridad en la habilidad que tienes para sobrevivir. Nunca te conocerás verdaderamente o sabrás la fuerza de tus relaciones, hasta que la adversidad te haya puesto a prueba".

Datos interesantes sobre la autora:

- Es una novelista, productora de cine y televisión, guionista y filántropa nacida en Inglaterra en 1965. Creadora de una de las novelas de fantasía más exitosas de todos los tiempos, Harry Potter. Ha vendido más de 400 millones de copias. Sus libros se han traducido a 67 idiomas.
- Su fortuna se estima en £230 000 000 (doscientos treinta millones de libras), es decir, alrededor de $5 400 000 000 (cinco mil cuatrocientos millones de pesos).

3. Comenten con tus compañeros de equipo y respondan:

a) De acuerdo con la autora, ¿qué podemos obtener del fracaso?

b) Lee el siguiente proverbio chino: "el fracaso es la madre del éxito". ¿Cómo explicarías su significado? Usa alguna experiencia de la clase de matemáticas o de la escuela para ejemplificarlo.

4. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

Rodolfo Fallas Soto es el joven costarricense ganador del prestigioso premio latinoamericano Simón Bolívar de Matemática Educativa. Rodolfo contó en una entrevista lo siguiente: "En la universidad justamente perdí los dos cursos de matemática y un profesor me dijo: –usted no sirve para la matemática debería retirarse y estudiar otra carrera..., y ahí fue donde demostré que sí y que tenía que salir adelante..." Si quieres saber más acerca de él y de cómo logró aprender del fracaso, consulta la liga: https://bit.ly/2JlepC2.

En el siguiente video Iñigo Sáenz de Urturi nos comparte algunas reflexiones útiles relacionadas al fracaso. Te recomendamos buscar en YouTube el video titulado "El fracaso, el combustible de tu éxito: Iñigo Sáenz de Urturi at TEDxLeon" o accede a la liga: https://bit.ly/1EoXpAG.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). Lección 8.6 Aprender del fracaso. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion8/8.6_E_Aprender_del_fracaso_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 9. Conocer las emociones

Objetivo general: Expresar verbalmente su experiencia emocional y describir las sensaciones corporales y pensamientos asociados a algunas emociones.

9.6 El aspecto dual de las emociones

Objetivo específico: Reconocer el aspecto dual de las emociones.

Introducción:
—Toc, toc
—¿Quién es?
—Yo, tu amigo el miedo.
—¿Mi amigo? ¿Qué te pasa? ¡Estás loco! Seguro ya se te olvidó que te apareciste en el último temblor. Por tu culpa no supe qué hacer. Me hubiera gustado salir corriendo.
—No me culpes por tu falta de autorregulación. Recuerda cuando me llamaste porque tenías que caminar por esa avenida peligrosa y era de noche ¡Ahí si estaba contigo! Y te ayudé. Gracias a mí estabas atento y no te pasó nada.
En esta lección exploraremos el carácter dual de las emociones: la misma emoción puede ser constructiva en algunas situaciones y destructiva en otras.

¿Te has preguntado por qué la misma emoción puede ayudar en algunas situaciones y perjudicar en otras? Reflexiona. ¿El miedo puede ser tu amigo o tu enemigo?

1. En grupos de dos o tres personas lean y analicen la siguiente historia.

Si quieren que Benjamín se retire de la clase, lean el punto A. Si quieren que no lo haga y se aguante el enojo, lean el punto B.

A. Y me sentí como la leche cuando hierve y se derrama del recipiente. Me contuve las ganas de gritarle, tomé mis cosas y me fui dando un portazo. Después, llegando a casa, me ganó la vergüenza y ya no puede regresar a clase. Reprobé la materia. Estoy arrepentido de lo que hice.

B. El enojo me duró un rato, mientras estaba sentado en mi silla sin hablar. Y me propuse demostrarle a mi profesor que se había equivocado al regañarme. Aprobé con 10. Hoy, quince años después del evento, recuerdo aquel día como uno importante en mi vida. Me di cuenta de que lo que hizo mi profesor fue para ayudarme. Y me ayudó mucho. Le estoy muy agradecido.

Entre todos discutan:

- ¿Qué conclusiones pueden sacar de la historia anterior?

- ¿Puede ser el enojo constructivo en algunas situaciones? ¿Por qué?

2. Encuentren un ejemplo en la clase de matemáticas donde la ansiedad fue destructiva y otro donde fue constructiva. Anótalos a continuación. Si se te dificulta, busca ejemplos de tu vida.

Constructiva: _____

Destructiva: _____

3. Discutan con todo el grupo: ¿cuándo una emoción es constructiva y cuándo es destructiva?

4. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

Si quieres saber más sobre el aspecto dual de las emociones, accede a la liga: https://bit.ly/2HLvBTS en la sección de recursos el artículo titulado "Ampliando el criterio acerca de las emociones".

Nota: En este texto los autores le llaman emociones aflictivas a lo que aquí hemos definido como emociones destructivas. A las emociones constructivas las denominan no aflictivas.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). Lección 9.6 El aspecto dual de las emociones. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion9/9.6_P_El_aspecto_dual_de_las_emociones_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 10 Estrategias para entrenar la atención

Objetivo general: Aplicar técnicas de atención enfocada usando diferentes objetos como soporte.

10.6 Parar y atender a los sonidos

Objetivo específico: Reconocer los sonidos como soporte para el entrenamiento de la atención.

Introducción: A veces queremos concentrarnos, pero ¡hay mucho ruido! La gente está hablando, lo de al lago tienen su radio prendido o escuchas el sonido de los coches. Entre el ruido externo y el ruido de los pensamientos internos puede parecer que es casi imposible estar tranquilo y enfocarse en algo. En esta lección verás que los sonidos no tienen que ser siempre una distracción. De hecho podemos usar los sonidos para entrenar la atención y calmar la mente.

1. Escucha la instrucción del maestro. La añadimos por si quieres repetir el ejercicio en casa.

Cuando observen que el profesor levante el puño de su mano, siéntate derecho y relaja el cuerpo. Realiza tres respiraciones profundas. Por un momento escucha sólo los sonidos a tu alrededor. Intenta solamente escuchar, sin engancharte con el sonido. Si te distraes, nótalo y regresa tu atención a los sonidos. Simplemente escucha.

Cuando escuches el palmear de las manos de tu maestro o maestra realiza una última respiración profunda y regresa a lo que estás haciendo.

2. Marca con una X qué tan calmada o agitada está tu mente:

a) Como una cascada	b) Como un río	c) Como un lago en calma

3. Comenten en equipos de tres o cuatro integrantes:

a) ¿Qué sonidos escucharon?
b) ¿Cómo se encuentra su mente ahora? ¿agitada o en calma?
c) ¿Cuál podría ser la utilidad de este ejercicio en la clase de matemáticas?

4. Escribe a continuación, ¿qué te deja esta la lección?

¿Quieres saber más?

En el siguiente video el doctor Andrés Martín nos comparte algunos estudios científicos relacionados al *Mindfulness* o atención plena. Te recomendamos buscar en Youtube el video titulado "*Mindfulness*: El arte de vivir conscientemente *TEDxSantCugat* o a la liga: https://bit.ly/2fXoKHl.

Referencia bibliográfica

Lección PARAR y atender a los sonidos. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion10/10.6_E_Para_atender_a_los_sonidos_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 11 Estrategias para entrenar las emociones

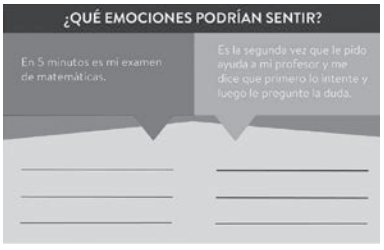
Objetivo general: Utilizar estrategias para regular sus emociones

11.6 Mis emociones recurrentes

Objetivo específico: Identificar las emociones más recurrentes que siento en la clase de matemáticas.

Introducción: Gratitud, placer de aprender, alegría, humor, felicidad, gozo, paz interior, armonía, interés, entusiasmo, euforia, excitación, miedo, enojo, tristeza, terror, pánico, susto, compasión, empatía, rencor, odio, depresión, frustración, decepción, culpa, placer, disgusto, aversión, desprecio, amor, sorpresa, envidia, vergüenza, celos, fascinación, deseo, desilusión, aversión, apego, respeto, ansiedad, timidez, estrés, preocupación, aburrimiento, satisfacción, anhelo, desazón, nerviosismo, tensión, regocijo, agitación, enojo, asco, impotencia, pena, motivación, desconsuelo, inseguridad, desinterés, antipatía, equilibrio, plenitud, entre muchas otras emociones posibles. ¿Cuál es tu emoción más recurrente en la clase de matemáticas?

1. En equipos de dos o tres integrantes, escriban qué emociones podrían sentir otros compañeros en las situaciones descritas en cada caso:



2. De forma individual, subraya que emoción sentirías tú en cada situación (una o varias). Si piensas que sentirías otra emoción que no está escrita agrégala y subráyala.

   a) ¿Cuál consideras que es tu emoción más recurrente en la clase de matemáticas?

   b) ¿Consideras que esta emoción genera reacciones constructivas o destructivas? Explica por qué.

3. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

¿Te sorprendió la lista de emociones de la introducción? Existe una gran variedad de palabras para nombrarlas. En el atlas de emociones se ilustra su diversidad acorde a su intensidad, frecuencia, las acciones y botones con las que suelen relacionarse. Te invitamos a buscar en tu navegador el Atlas de las emociones y buscar la opción en español acceder a la liga: https://bit.ly/2kY57DD.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). Lección 11.6 Mis emociones recurrentes. *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion11/11.6_E_Mis_emociones_recurrentes_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

Lección 12 ¿Qué te llevas del curso?

Objetivo general: Evaluar qué le sirvió del curso y cómo puede aplicarlo en diferentes contextos.

12.6 ¿Cómo me fue con la tarjeta MEROP?

Objetivo específico: Evaluar la estrategia de la tarjeta MEROP para lidiar con situaciones de la escuela.

Introducción: Estudio, aplico, hago un balance, analizo, vuelvo a aplicar, me equivoco y mejoro, escucho, aplico otra técnica, me sale bien y sigo avanzando.
Me enojo y siento que no puedo, reflexiono y sigo adelante, comparto, surgen nuevas ideas, me da pereza, la reconozco, me entusiasmo, sigo adelante, doy un consejo, me gusta estar bien, y estudio y ayudo y sigo mejorando...Así es como uno se entrena en las habilidades socioemocionales.
En esta lección vamos a reflexionar sobre la tarjeta MEROP y cómo podríamos aplicarlas a situaciones conflictivas en la escuela.

1. En equipos de tres o cuatro personas inventen una situación conflictiva en la clase de matemáticas (o en la escuela) de un personaje ficticio a quien llamaremos Katy. Esta situación podría resolverse usando la tarjeta MEROP.

a) Describan Brevemente la situación:

b) Escriban tres breves consejos que le darían a Katy para llenar su tarjeta MEROP:

I. _____

II. _____

III. _____

Completen la tarjeta para Katy

ME — Mi meta es: _____

R — Mejor resultado: _____

O — Obstáculo: _____

P — Plan:

Si _____ entonces voy a _____
Obstáculo (cuándo y dónde) — Acción (para vender el obstáculo)

2. En plenaria con todo el grupo comenten:
a) Lo que respondieron en la actividad anterior.
b) Alguna situación particular en la que fue de utilidad el uso de la tarjeta MEROP.

3. Escribe a continuación, ¿qué te llevas de esta lección?

¿Quieres saber más?

¿Sabías que aplicar las herramientas que aprendiste a lo largo del curso se parece mucho al proceso creativo de los escultores? Hay que remover el material sobrante para sacar la obra de arte que hay dentro. Cuando tengas dificultades para continuar practicando las estrategias que vimos en el curso, recuerda que poco a poco y con perseverancia podrás mejorar tu manera de lidiar con los obstáculos que quizá no te dejen avanzar, paso a paso te acercas a tu meta y tendrás en la palma de tu mano la clave del bienestar. Para ver las posibilidades que hay dentro de una barra de jabón, puedes buscar en tu navegador "El jabón, un video para reflexionar", o accede a la liga: https://bit.ly/1gMXhPl.

Referencia bibliográfica

SEP (2018). Lección 12.6 ¿Cómo me fue con la tarjeta MEROP? *Construye-T*. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/resources/pdf/lecciones/leccion12/12.6%20E_Como_me_fue_con_la_tarjeta_MEROP_Matematicas.pdf (Consultado el 28 de abril de 2018).

INTERDISCIPLINARIEDAD

La siguiente sección presenta tres proyectos interdisciplinarios en los que descubrirás los vínculos y puntos de encuentro entre las diversas asignaturas que cursas durante el semestre.

Nuestro principal propósito es que al analizar tu realidad y los fenómenos que ocurren en ella, identifiques las diversas competencias que requieres desarrollar para constituirte como agente de transformación social ante las diversas problemáticas que aquejan tu comunidad y a la sociedad en general.

La intención es que con ayuda de tus profesores de las diferentes asignaturas del semestre, elijan el proyecto interdisciplinario que les resulte más interesante y, a partir de ello, apliquen los conocimientos y competencias que han adquirido.

Para identificar qué grupo de competencias genéricas se está desarrollando en el proyecto elegido se construyó el siguiente código:

Cuidado de sí mismo	
Comunicación y lenguaje	
Pensamiento crítico y reflexivo	
Aprendizaje autónomo	
Trabajo colaborativo	
Participación social	

De esta manera, las actividades planteadas en esta sección contribuirán al desarrollo de competencias genéricas que se evaluarán al final del proyecto.

Eje transversal social

Quebrando el código, un sí a la equidad de género

TALLER DE LECTURA Y REDACCIÓN 1. Produce textos expositivos con base en su estructura y de acuerdo con las necesidades de su entorno y para la aplicación de su vida diaria (CG: 5.1, 6.1 y 8.3).

QUÍMICA 1. Contrasta el concepto de la Química, su historia, sus aplicaciones e implicaciones con la vida cotidiana (CG: 4.5, 5.2, 6.1 y 8.1).

ÉTICA 1. Practica el diálogo y la tolerancia para un desarrollo favorable en su entorno comunitario (CG: 1.5, 9.1 y 9.5).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. Reconoce el papel de la investigación científica y sus conocimientos para identificar problemas sociales de su entono (CG:4.3).

MATEMÁTICAS 1. Organiza y representa información mediante métodos gráficos, proponiendo formas innovadoras de solución a diversas problemáticas de su entorno (CG: 4.1, 4.5, 5.2 y 5.6).

INFORMÁTICA 1. Logra el manejo de fórmulas, funciones y gráficos básicos en el diferente software de aplicación de hojas de cálculo (CG: 1.5, 3.3 y 4.5).

Proyecto 1

Quebrando el código: un sí a la equidad de género

Breve descripción del proyecto

Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos emprender la campaña "Quebrando el código: un sí a la equidad de género", mediante la cual reflexionen respecto a la importancia de contribuir a la igualdad de dignidad y derecho de hombres y mujeres.

Para realizar su proyecto respondan las siguientes interrogantes:

- ¿Consideras que la equidad de género contribuye al progreso social de la humanidad? ¿De qué forma?
- ¿Por qué la equidad de género es una prioridad para la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco)?
- ¿Qué rol debe asumir la juventud ante este tipo de fenómenos sociales?

Contribución de la asignatura

Antes de iniciar con la planeación de su proyecto, realicen las siguientes actividades en equipo:

1. Investiguen en el portal de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) en qué proporción participan hombres y mujeres en la investigación científica que se realiza en a nivel mundial.
2. Investiguen el porcentaje de participación de hombres y mujeres en el Sistema Nacional de Investigadores del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).
3. Representen la información que han investigado, en los dos puntos anteriores, mediante el gráfico que consideren más adecuado.

Planeación

1. Identifiquen en su comunidad las diversas situaciones que se viven en torno a la equidad de género.
2. Investiguen cuáles son los pasos a seguir para el diseño y emprendimiento de una campaña de concientización sobre la igualdad y equidad de género, considerando los siguientes aspectos:
   - Información idónea para llevar a cabo una charla masiva que convoque a toda la comunidad educativa.
   - Discurso donde expliquen, de forma clara y concreta, en qué consiste la equidad de género, enfatizando que el vivirla y fomentarla representaría un logro social para la humanidad.
   - Apoyos visuales, de audio o multimedia, para hacer su campaña más atractiva y de mayor alcance.
3. Construyan un listado con las actividades que deberán realizar para el resto del proyecto; definan las responsabilidades de cada integrante y los materiales que requerirán como insumos. Finalmente, establezcan junto con el profesor un cronograma de actividades de las siguientes fases.

Ejecución

Colaboren en equipo para realizar lo siguiente:

1. Presenten la campaña ante la comunidad educativa.
2. Tomen evidencias sobre la participación e impacto social de la campaña considerando:
   - El número de asistentes a la charla.
   - La cantidad de *likes* en las redes sociales o el número de visitas [en el caso de que hayan construido y compartido algún recurso (video, audio, o presentación multimedia) en YouTube, especialmente diseñado para la ocasión].
3. Realicen, por equipos, un reporte escrito o informe sobre el objetivo de toda la actividad; señalen los aspectos que les parecieron más relevantes, así como las ideas que surgieron en torno al impacto de las situaciones abordadas; expliquen si éstas constituyen un problema social y, de ser así, indiquen las acciones que son necesarias para abatirlo.

Consolidación

- Toman decisiones teniendo como fin el contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.

- Advierten que los fenómenos sociales que se presentan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.
- Articulan saberes de diversos campos y establecen relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Evidencia

Informe o reporte escrito.

Autoevaluación

Utiliza la rúbrica que a continuación se comparte y autoevalúa tu participación dentro del equipo.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.
Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura, pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas, aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Instrumento para la coevaluación

Utilicen la siguiente rúbrica para coevaluarse entre equipos.

Proceso a evaluar: Desarrollo del proyecto				
Recomendaciones para la evaluación: Coevaluación				
Criterios y evidencias	**Niveles de dominio**			
	Inicial-Receptivo	**Básico**	**Autónomo**	**Estratégico**
Producto del proyecto: reporte escrito sobre el proyecto "Quebrando el código, un sí a la equidad de género".	No se presenta completo ni con coherencia.	Se presenta de manera poco definida y sin coherencia.	Se presenta de manera escueta pero coherente.	Se presenta con claridad y coherencia.
Ponderación: 40%	**1 punto**	**2 puntos**	**3 puntos**	**4 puntos**
Integración de los conocimientos de las diversas asignaturas del semestre.	Los conocimientos que se integran son incompletos y con poca adecuación.	Los conocimientos que se integran son los mínimos necesarios.	Los conocimientos que se integran son suficientes.	Los conocimientos que se integran son adecuados, suficientes y claros.
Ponderación: 40%	**1 punto**	**2 puntos**	**3 puntos**	**4 puntos**
Participación en el proyecto.	La ejecución del proyecto muestra poco cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son los mínimos necesarios.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son suficientes.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son adecuados, creativos e interesantes.
Ponderación: 20%	**0.5 puntos**	**1 punto**	**1.5 puntos**	**2 puntos**
RETROALIMENTACIÓN:				

Heteroevaluación

En la siguiente escala estimativa:

- El 0 significa que la competencia aún no se desarrolla.
- El 1 significa que la competencia comienza a manifestarse.
- El 2 significa que la competencia está en desarrollo.
- El 3 significa que la competencia se ha logrado.

El siguiente código de colores representa el grupo al cual corresponden las competencias evaluadas.

Comunicación y lenguaje	
Pensamiento crítico y reflexivo	

Escala estimativa para valorar el nivel de logro de las competencias genéricas desarrolladas con el proyecto "Quebrando el código, un sí a la equidad de género"					
Dimensión	**Referentes**	**Nivel**			
		0	**1**	**2**	**3**
Lectura	Recupera información del texto.				
	Reconstruye las principales ideas del texto.				
	Reflexiona sobre el texto y lo evalúa.				
	Entiende los propósitos y destinatarios del texto.				
	Reflexiona sobre su proceso de lectura.				
Redacción	Coherencia.				
	Cohesión.				
	Adecuación.				
	Aspectos formales y normativos.				
	Proceso de escritura (planeación, revisión, corrección).				
Escucha	Entiende, analiza y registra mensajes orales.				
	Mantiene una atención activa frente a lo que expresan otras personas.				
	Tiene una actitud pertinente, crítica y abierta al escuchar.				
	Identifica sus posibilidades y limitaciones comunicativas.				
Expresión oral	Usa variedad de registros y tipos de discurso.				
	Identifica sus posibilidades y limitaciones comunicativas.				
Búsqueda de información	Define necesidades informativas.				
	Localiza información en distintas fuentes.				
	Valora la confiabilidad de la información.				
	Organiza y sistematiza la información.				
	Usa la información de manera ética.				
Manejo de las TIC	Se comunica y colabora en red.				
	Crea contenidos escritos y audiovisuales.				
	Busca información en medios digitales.				
	Analiza la información por medios digitales.				
Estructuración	Sintetiza información para generar conclusiones.				
	Desarrolla estrategias para la construcción de nuevos conocimientos.				
	Analiza y ordena ideas relevantes de acuerdo con los objetivos que persigue.				
	Formula propósitos, metas y objetivos claros y factibles.				
Comprensión	Identifica ideas principales de un texto o fuente de información.				
	Identifica con claridad los propósitos de las tareas asignadas y da seguimiento al logro de los objetivos.				
	Comprende lo que se le pregunta y es capaz de dar respuesta.				
	Reformula ideas y las relaciona con otras.				
Reflexión	Piensa con detenimiento acerca de los conceptos que usa.				
	Relaciona el aprendizaje con su experiencia y con los problemas importantes en su entorno, en su núcleo familiar, en sus relaciones, etcétera.				

INTERDISCIPLINARIEDAD

Eje transversal ambiental

¡Qué la Química te acompañe!

TALLER DE LECTURA Y REDACCIÓN 1. Produce textos expositivos con base en su estructura y de acuerdo con las necesidades de su entorno y para la aplicación de su vida diaria (CG: 5.1, 6.1 y 8.3).

QUÍMICA 1. Distingue la interrelación de la Química con otras ciencias, de acuerdo con su contexto, reconociendo el impacto de ésta en la humanidad (CG: 4.5, 5.2, 6.1 y 8.1).

ÉTICA 1. Elige una manera responsable del uso correcto de los diferentes tipos de normas en el contexto adecuado. (CG: 1.5, 9.1 y 9.5).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. Reconoce el papel de la investigación científica y sus conocimientos para identificar problemas sociales de su entono (CG: 4.3).

MATEMÁTICAS 1. Resuelve y formula de manera colaborativa problemas aritméticos eligiendo críticamente una alternativa de solución que le permita afrontar retos en situaciones de su entorno (CG: 5.1, 5.2 y 8.2).

INFORMÁTICA 1. Examina los ambientes virtuales y propone actividades productivas, aplicativas y creativas dentro de ellos que lo lleven al desarrollo de los mismos para beneficio de su entorno académico y social (CG: 4.1, 4.2, 4.3 y 4.5).

Proyecto 2

¡Qué la Química te acompañe!

Breve descripción del proyecto

Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos habilitar el foro en línea "¡Qué la Química te acompañe!", mediante el cual reflexionarán en torno a la omnipresencia de la Química y su importancia para la comprensión del mundo material que nos rodea.

Para realizar su proyecto respondan las siguientes interrogantes:

- ¿Consideras que la comprensión del mundo material depende de nuestros conocimientos acerca de la Química? Argumenta tu respuesta.
- ¿Por qué crees que se considera a la Química como un gran aliado para la búsqueda de soluciones a retos globales como: la alimentación, el cambio climático, el suministro de agua y energía, la preservación del ambiente, entre otros?
- ¿A qué atribuyes que los científicos de nuestros días reconozcan a la Química como una ciencia transversal al servicio de la paz y del desarrollo de la humanidad?

Contribución de la asignatura

Antes de iniciar con la planeación de su proyecto, realicen las siguientes actividades en equipo:

1. Investiguen cómo se clasifican y cuáles son las propiedades de los números reales.
2. Investiguen en qué consisten las operaciones que se pueden realizar con los números reales:
   - Leyes de los signos.
   - Leyes de los exponentes.
   - Jerarquía de operaciones.
   - Mínimo común múltiplo.
   - Máximo común divisor.
3. Investiguen de qué forma los números naturales y sus operaciones se interrelacionan con la Química.
4. Realicen un escrito con sus conclusiones.

Planeación

1. En equipo identifiquen la interrelación que guarda la Química con otras disciplinas como:
   - La medicina.
   - Las matemáticas.
   - La física.
   - La biología.
   - La ética.
   - La informática.
   - Las ciencias sociales.
2. Investiguen las comodidades que hoy en día son posibles gracias a los avances de la Química.
3. Investiguen al menos 20 procesos de su vida cotidiana relacionados con la transformación de la materia.
4. Tomen en cuenta las siguientes consideraciones para la creación del foro en línea:
   - Foro de debate único; es decir, el intercambio de ideas será sobre un solo tema.
   - El equipo diseñará dos preguntas que considere clave en torno a la omnipresencia de la Química y la utilidad de ésta para la comprensión de los procesos de transformación que sufre la materia.
   - Protocolo de participación dentro del foro.
5. Construyan un listado con las actividades que deberán realizar para el resto del proyecto; definan las responsabilidades de cada integrante y los materiales que requerirán como insumos. Finalmente, establezcan, junto con su profesor, el cronograma de actividades de las siguientes fases.

Ejecución

Colaboren en equipo para realizar lo siguiente:

1. Abran el foro durante una semana e inviten a todos sus compañeros de grupo a participar en él.
2. Durante la semana elegida, den seguimiento diario a las respuestas que reciban y anoten en una bitácora las palabras o frases que se repitan y tengan alguna connotación importante respecto a la percepción de sus compañeros en torno a la Química.
3. Al concluir la semana del foro (día ocho), convoquen a una reunión con sus compañeros de equipo para socializar los hallazgos detectados en las respuestas de los participantes.
4. Realicen una estadística de participación en el foro por día.
5. Redacten, por equipo, un reporte escrito o informe sobre el objetivo de toda la actividad, señalen los aspectos que les parecieron más relevantes y las ideas que surgieron en torno a:
   - La omnipresencia de la Química.
   - La importancia de la Química para la comprensión de los fenómenos de transformación de la materia.
   - La transversalidad de la Química o su interrelación con todas las áreas del conocimiento.

Consolidación

- Articulan saberes de diversos campos y establecen relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- Aplican distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.

Evidencia

Informe o reporte escrito.

Autoevaluación

Utiliza la rúbrica que a continuación se comparte y autoevalúa tu participación dentro del equipo.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.
Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura, pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas, aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Instrumento para la coevaluación

Utilicen la siguiente rúbrica para coevaluarse entre equipos.

Proceso a evaluar: Desarrollo del proyecto				
Recomendaciones para la evaluación: Coevaluación				
Criterios y evidencias	**Niveles de dominio**			
	Inicial-Receptivo	**Básico**	**Autónomo**	**Estratégico**
Producto del proyecto: reporte escrito sobre el foro en línea "¡Qué la Química te acompañe!	No se presenta completo ni con coherencia.	Se presenta de manera poco definida y sin coherencia.	Se presenta de manera escueta pero coherente.	Se presenta con claridad y coherencia.
Ponderación: 40%	**1 punto**	**2 puntos**	**3 puntos**	**4 puntos**
Integración de los conocimientos de las diversas asignaturas del semestre.	Los conocimientos que se integran son incompletos y con poca adecuación.	Los conocimientos que se integran son los mínimos necesarios.	Los conocimientos que se integran son suficientes.	Los conocimientos que se integran son adecuados, suficientes y claros.

(Continúa)

(Continuación)

Ponderación: 40%	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos
Participación en el proyecto.	La ejecución del proyecto muestra poco cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son los mínimos necesarios.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son suficientes.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son adecuados, creativos e interesantes.
Ponderación: 20%	**0.5 puntos**	**1 punto**	**1.5 puntos**	**2 puntos**
RETROALIMENTACIÓN:				

Heteroevaluación

En la siguiente escala estimativa:

- El 0 significa que la competencia aún no se desarrolla.
- El 1 significa que la competencia empieza a manifestarse.
- El 2 significa que la competencia está en desarrollo.
- El 3 significa que la competencia se ha logrado.

El siguiente código de colores representa el grupo al cual corresponden las competencias evaluadas.

Pensamiento crítico y reflexivo	
Trabajo colaborativo	

Escala estimativa para valorar el nivel de logro de las competencias genéricas desarrolladas con el proyecto "¡Qué la Química te acompañe!"					
Dimensión	Referentes	Nivel			
		0	1	2	3
Estructuración	Sintetiza información para generar conclusiones.				
	Desarrolla estrategias para la construcción de nuevos conocimientos.				
	Analiza y ordena ideas relevantes de acuerdo con los objetivos que persigue.				
	Formula propósitos, metas y objetivos claros y factibles.				
Comprensión	Identifica ideas principales de un texto o fuente de información.				
	Identifica con claridad los propósitos de las tareas asignadas y da seguimiento al logro de los objetivos.				
	Comprende lo que se le pregunta y es capaz de dar respuesta.				
	Reformula ideas y las relaciona con otras.				
Reflexión	Participa en debates de manera propositiva.				
	Piensa con detenimiento acerca de los conceptos que usa.				
	Relaciona el aprendizaje con su experiencia y con los problemas importantes en su entorno, en su núcleo familiar, en sus relaciones, etcétera.				
Liderazgo	Aporta ideas pertinentes dentro de un grupo que impactan positivamente en la construcción de conocimiento.				
	Escucha diferentes opiniones con respeto.				
	Fomenta la confianza y cordialidad en los grupos de trabajo.				
Cooperación	Es capaz de cumplir diversas tareas con personas diferentes a él.				
	Logra llegar a acuerdos a pesar de que existan muchos puntos de vista en el grupo.				
	Tiene disposición para formar parte de diferentes grupos con finalidades específicas.				
	Procura obtener lo que él o su grupo desea, considerando los derechos y necesidades de los demás.				
Solidaridad	Muestra preocupación por la opinión de sus compañeros.				
	Ofrece apoyo siendo consciente de sus limitaciones.				
Sinergia	Utiliza las habilidades integrándolas con las de otras personas para alcanzar diferentes objetivos.				
Negociación	Integra puntos de vista, posturas e ideologías para llegar a acuerdos en busca del bien común.				
	Establece un diálogo respetuoso y conciliador tomando en cuenta las diferentes opiniones.				

Eje transversal social

Bachillerato: mi nueva mirada al mundo

TALLER DE LECTURA Y REDACCIÓN 1. Aplica las funciones del lenguaje en los diversos contextos en los que se desenvuelve (CG: 4.2, 6.4 y 8.2).

QUÍMICA 1. Argumenta la utilidad del método científico para proponer posibles soluciones a problemas del entorno relacionados con las ciencias experimentales (CG: 4.5, 5.2, 6.1 y 8.1).

ÉTICA 1. Establece su propia jerarquía de valores, desde un punto de vista ético y reflexivo en su contexto local y nacional (CG: 3.3, 8.2 y 10.2).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. Reconoce el papel de la investigación científica y sus conocimientos para identificar problemas sociales de su entorno (CG: 4.3).

MATEMÁTICAS 1. Utiliza lenguaje algebraico para representar situaciones reales e hipotéticas siendo perseverantes en la búsqueda de soluciones (CG: 5.1, 5.2 y 8.2).

INFORMÁTICA 1. Argumenta de forma ética y responsable las acciones adecuadas para fomentar la seguridad dentro de la ciudadanía digital (CG: 1.4, 1.5, 3.3 y 4.5).

Proyecto 3

Bachillerato: mi nueva mirada al mundo

Breve descripción del proyecto

Para poner en práctica lo que han aprendido en el curso, les proponemos realizar el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo", mediante el cual reflexionarán en torno a la etapa de vida por la que transitan y la nueva mirada al mundo que les ofrece el cursar el bachillerato.

Para realizar su proyecto respondan las siguientes interrogantes:

- ¿A qué atribuyes que a partir de 2012 se estableció en la Constitución Política Mexicana a la Educación Media Superior como parte de la educación obligatoria?
- ¿Por qué crees que es importante que estudies y culmines exitosamente tu bachillerato?
- ¿Cuáles son las competencias que estás desarrollando en el bachillerato, las cuales te preparan para observar, analizar e intervenir propositivamente en la transformación de tu comunidad?

Contribución de la asignatura

Antes de iniciar con la planeación de su proyecto, realicen las siguientes actividades en equipo:

1. Investiguen a qué se le denomina lenguaje algebraico.
2. Investiguen cuáles son las operaciones algebraicas.
3. Dialoguen sobre la diferencia entre lenguaje aritmético y lenguaje algebraico.
4. Investiguen qué porcentaje de la población de tu país no tiene estudios de bachillerato y cuánto corresponde a hombres y mujeres. Elaboren un modelo algebraico (modelo matemático) que represente el fenómeno analizado.
5. Elaboren un escrito donde expresen sus conclusiones sobre la importancia del uso del lenguaje algebraico como herramienta fundamental para modelar, analizar y comprender su realidad.

Planeación

1. Dialoguen al interior del equipo y socialicen:
   - De qué forma consideran que los aprendizajes de bachillerato los preparan para la vida.
   - Cuáles vínculos o puntos de encuentro identifican entre las asignaturas que cursan en este semestre.
   - La diferencia entre la percepción que tenían del mundo hace unos años y la que tienen hoy en día, gracias a sus estudios de bachillerato.
2. Investiguen cómo se organiza un panel de discusión.
3. Elijan a los panelistas y al moderador.
4. Definan la sede y horario del evento.
5. Definan la lista de invitados (de preferencia, toda la comunidad educativa).
6. Publiciten el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo".
7. Construyan un listado con las actividades que deberán realizar para el resto del proyecto, definan las responsabilidades de cada integrante y los materiales que requerirán como insumos. Finalmente, establezcan, junto con su profesor, el cronograma de actividades de las siguientes fases.

Ejecución

Colaboren en equipo para realizar lo siguiente:

1. Presenten el panel de discusión "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo".
2. Tomen video del evento y compártanlo en las redes sociales.
3. Tomen nota sobre la participación e impacto social del panel, considerando:
   - Número de asistentes al evento.
   - Cantidad de *likes* en las redes sociales o el número de visitas, en el caso de que hayan subido su video a YouTube.
4. Realicen, por equipos, un reporte escrito o informe sobre el objetivo de toda la actividad, señalen los aspectos que les parecieron más relevantes y las ideas que surgieron en torno al impacto de las situaciones abordadas.

Consolidación

- Articulan saberes de diversos campos y establecen relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
- Aplican distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.

Evidencia

Informe o reporte escrito.

Autoevaluación

Utiliza la rúbrica que a continuación se comparte y autoevalúa tu participación dentro del equipo.

Indicador	Excelente	Bueno	Regular	Necesita mejorar
Participación efectiva	Participa de forma constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta y apoya a los demás integrantes del equipo.	Participa de forma constructiva en el equipo, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta.	Algunas veces participa en las tareas del trabajo o proyecto ocupando que los demás le recuerden lo que tiene que hacer.	Evita involucrarse y participar de forma efectiva en las actividades del equipo.
Capacidad de propuesta	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto, de forma innovadora e involucrando la participación de todos los integrantes del equipo.	Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo.	Algunas veces propone ideas para dar solución a un problema o llevar a cabo una tarea o proyecto dentro del equipo.	Se le dificulta realizar propuestas de solución para un problema, tarea o proyecto del equipo.
Apertura al diálogo	Aporta sus puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.	Aporta sus puntos de vista con apertura, pero se le dificulta considerar los de las demás personas.	Algunas veces comenta sus puntos de vista a algunos integrantes del equipo.	Se le dificulta compartir sus ideas o puntos de vista.
Tolerancia	Respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas, aunque no coincidan con las propias.	La mayoría de las veces respeta las opiniones, ideas o actitudes de otras personas.	Escucha las ideas y opiniones de los demás, aunque se le dificulta aceptarlas.	No respeta las ideas de sus compañeros por ser distintas a las propias.
Compromiso y responsabilidad	Se compromete y responsabiliza totalmente con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	La mayoría de las veces se enfoca con el logro de la tarea o proyecto del equipo.	Algunas veces se comporta comprometido con las tareas del equipo y otras distante y distraído.	Evita comprometerse con las tareas del equipo y rara vez o nunca cumple con los compromisos y acuerdos establecidos.
Colaboración	Trabaja en conjunto con los demás integrantes, procurando siempre la unión del equipo, conociendo el todo y las partes de la tarea o proyecto a realizar.	Comparte y apoya el trabajo de los integrantes del equipo, es un buen compañero que se esfuerza por el logro de la tarea o proyecto.	Algunas veces comparte y apoya el trabajo de sus compañeros, ocasionalmente causa problemas dentro del equipo.	Es individualista en su forma de trabajar, no apoya el trabajo de otros y se le dificulta integrarse de manera efectiva al equipo.

Instrumento para la coevaluación

Utilicen la siguiente rúbrica para coevaluarse entre equipos.

Proceso a evaluar: Desarrollo del proyecto				
Recomendaciones para la evaluación: Coevaluación				
Criterios y evidencias	**Niveles de dominio**			
	Inicial-Receptivo	**Básico**	**Autónomo**	**Estratégico**
Producto del proyecto: reporte escrito sobre el panel de discusión: "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo".	No se presenta completo ni con coherencia.	Se presenta de manera poco definida y sin coherencia.	Se presenta de manera escueta pero coherente.	Se presenta con claridad y coherencia.
Ponderación: 40%	**1 punto**	**2 puntos**	**3 puntos**	**4 puntos**
Integración de los conocimientos de las diversas asignaturas del semestre.	Los conocimientos que se integran son incompletos y con poca adecuación.	Los conocimientos que se integran son los mínimos necesarios.	Los conocimientos que se integran son suficientes.	Los conocimientos que se integran son adecuados, suficientes y claros.
Ponderación: 40%	**1 punto**	**2 puntos**	**3 puntos**	**4 puntos**
Participación en el proyecto.	La ejecución del proyecto muestra poco cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son los mínimos necesarios.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son suficientes.	El cuidado, organización y participación de los integrantes del equipo, en el proyecto, son adecuados, creativos e interesantes.
Ponderación: 20%	**0.5 puntos**	**1 punto**	**1.5 puntos**	**2 puntos**
REATROLIMENTACIÓN:				

Heteroevaluación

En la siguiente escala estimativa:

- El 0 significa que la competencia aún no se desarrolla.
- El 1 significa que la competencia empieza a manifestarse.
- El 2 significa que la competencia está en desarrollo.
- El 3 significa que la competencia se ha logrado.

El siguiente código de colores representa el grupo al cual corresponden las competencias evaluadas.

Pensamiento crítico y reflexivo	
Trabajo colaborativo	

Escala estimativa para valorar el nivel de logro de las competencias genéricas desarrolladas con el proyecto "Bachillerato: mi nueva mirada al mundo"						
Dimensión	Referentes	Nivel				
		0	1	2	3	
Estructuración	Sintetiza información para generar conclusiones.					
	Desarrolla estrategias para la construcción de nuevos conocimientos.					
	Analiza y ordena ideas relevantes de acuerdo con los objetivos que persigue.					
	Formula propósitos, metas y objetivos claros y factibles.					
Comprensión	Identifica ideas principales de un texto o fuente de información.					
	Identifica con claridad los propósitos de las tareas asignadas y da seguimiento al logro de los objetivos.					
	Comprende lo que se le pregunta y es capaz de dar respuesta.					
	Reformula ideas y las relaciona con otras.					
Reflexión	Participa en debates de manera propositiva.					
	Piensa con detenimiento acerca de los conceptos que usa.					
	Relaciona el aprendizaje con su experiencia y con los problemas importantes en su entorno, en su núcleo familiar, en sus relaciones, etcétera.					
Liderazgo	Aporta ideas pertinentes dentro de un grupo que impactan positivamente en la construcción de conocimiento.					
	Escucha diferentes opiniones con respeto.					
	Fomenta la confianza y cordialidad en los grupos de trabajo.					
Cooperación	Es capaz de cumplir diversas tareas con personas diferentes a él.					
	Logra llegar a acuerdos a pesar de que existan muchos puntos de vista en el grupo.					
	Tiene disposición para formar parte de diferentes grupos con finalidades específicas.					
	Procura obtener lo que él o su grupo desea, considerando los derechos y necesidades de los demás.					
Solidaridad	Muestra preocupación por la opinión de sus compañeros.					
	Ofrece apoyo siendo consciente de sus limitaciones.					
Sinergia	Utiliza las habilidades integrándolas con las de otras personas para alcanzar diferentes objetivos.					
Negociación	Integra puntos de vista, posturas e ideologías para llegar a acuerdos en busca del bien común.					
	Establece un diálogo respetuoso y conciliador tomando en cuenta las diferentes opiniones.					

Cómo hacer un problemario

El problemario en matemáticas es un recurso el cual facilitará tu aprendizaje fomentando tu habilidad para aprender de forma autónoma. Este problemario debe contener actividades y ejercicios que te posibiliten ejercitar de forma práctica, crítica, creativa, analítica y reflexiva la resolución de problemas relacionados con el álgebra. Los ejercicios y las actividades propuestas deben contar con la solución correspondiente para que el profesor o tus compañeros puedan revisarlos y corregir los errores, si los hay. Este problemario debe cumplir con las competencias y desempeños desarrollados en este libro.

Recuerda que algunas claves para resolver problemas matemáticos son:

1. Identificar los datos que nos proporciona el problema y lo que nos pide, es decir, identificar la incógnita. Puedes usar tus propias palabras para reescribir el problema.
2. Realizar las operaciones necesarias para la resolución del problema respetando el orden o jerarquía de cada una de ellas.
3. Comprobar por distintos métodos el resultado de nuestro problema para tener una mayor certeza de la solución.

Cómo hacer un reporte

El reporte es la conclusión de la labor de búsqueda, estructuración y análisis de un tema en particular, a partir de la consulta de fuentes directas o indirectas y electrónicas o impresas. Tiene como finalidad presentar los resultados obtenidos en el proceso de investigación. Existen dos tipos de reportes: el académico y el no académico, en éstos se pueden incluir estudios cuantitativos o cualitativos.

A continuación se presentan las características del reporte académico.

- Su objetivo principal es presentar ante el grupo de estudiantes y sus profesores los resultados. Los lectores del documento son básicamente del ámbito estudiantil.
- El tipo de documento en que se puede presentar el reporte es la tesis, la disertación, el artículo para publicación en revistas científicas, libros y reportes técnicos.

A continuación se explican los elementos del reporte tras una investigación.

- **Portada.** Debe tener el título de la investigación, nombre o nombres de los autores o las autoras, el nombre de la institución a la que pertenecen, fecha de presentación del reporte.
- **Índice.** Contiene presentación, títulos de capítulos, subtítulos, número de página en que se localiza cada tema y subtema, apéndices si los hay.
- **Resumen.** Da a conocer en forma breve lo esencial del reporte de investigación, y debe incluir el planteamiento del problema, el método utilizado, los resultados más importantes y las conclusiones principales.
- **Introducción.** Incluye los antecedentes del planteamiento de la investigación, el objetivo de la misma, la justificación (el porqué se hace la investigación del tema), el contexto (dónde y cómo se realizó), las variables que pudieran encontrarse y las limitaciones que pudiera tener.
- **Marco teórico.** Hace referencia a las investigaciones que se han hecho antes sobre el tema, mismas que deben revisarse.
- **Método.** La forma en que se realizó la investigación.

- **Enfoque.** Cualitativo, cuantitativo o mixto.
- **Resultados.** Los hallazgos, aun cuando no fueran los esperados.
- **Conclusiones.** Ideas generales que se desprenden de la labor y los resultados de la investigación.
- **Bibliografía.** En ella se citan los libros, revistas, tesis, etc., que se han utilizado para realizar el desarrollo del tema.

Cómo organizar una plenaria

Se conoce como plenaria a la reunión que tiene como finalidad discutir sobre un tema en particular. En las sesiones plenarias deben participar todos los integrantes de una organización para tomar decisiones trascendentales o de suma importancia para una organización, institución o país.

Una sesión plenaria integra las participaciones individuales y las participaciones de los representantes de grupos, organizaciones o equipos de trabajo, quienes exponen las conclusiones puntuales sobre el tema que sus integrantes han investigado y discutido, y que se correlacionan con las de las otras organizaciones o equipos. Por esta razón, para poder preparar una sesión plenaria, es necesario que:

1. Una vez elegido el tema, es necesario que se especifique cuáles son los aspectos principales para considerar al recabar información y discutir sobre un tema. De esta forma, durante la plenaria las participaciones de todos tendrán puntos en común para comparar y debatir.
2. Los participantes de la plenaria deberán tener conocimiento del tema para que pueda abrirse la discusión al respecto y se puedan determinar los elementos relevantes, los acuerdos y las problemáticas que se generan en torno a ellos.
3. Deberá designarse a alguien para que lleve el registro escrito de los puntos importantes de cada apartado de la previa investigación y los acuerdos de la discusión.
4. Se designará a un representante del equipo, quien en la sesión plenaria expondrá las conclusiones apoyándose en el registro que se elaboró.

Entonces, para que una plenaria se desarrolle lo mejor posible se deben observar las siguientes pautas:

- Habrá un moderador o maestro de debates: Su función es vigilar que se cumpla el tiempo asignado a cada participante para su exposición. Evitar las interrupciones, dar la palabra a los integrantes de las comisiones o grupos participantes. Tomar nota de los aspectos importantes de la discusión para dar una conclusión general de la reunión.
- Se debe declarar la apertura de la plenaria de manera formal, pues es una discusión de gran importancia.
- Deben anotarse todas las participaciones o bien grabarse para que quede el registro.
- Las comisiones presentan sus propuestas respetando el tiempo que les ha sido asignado.
- En caso de que hubiera alguna intervención individual, podrá participar con su propuesta, y se atendrá a las mismas reglas.
- Una vez que han participado todos los ponentes representantes de los grupos, equipos o individuales, se llega a conclusiones y se vota por la propuesta más viable.
- Se puede llegar a una conclusión general, en caso de que se hayan presentado propuestas diversas que cumplan con las necesidades de solución del tema.
- Se cierra formalmente la plenaria registrando por escrito los acuerdos logrados, y firmando el documento resultante.

Un ejemplo de estas reuniones, son las que se realizan en las cámaras de Diputados y Senadores, es decir en el Poder Legislativo, con el fin de analizar las propuestas de Ley que presenta el Poder Ejecutivo, es decir, el presidente de la República, en el caso de México.

Las cámaras están divididas en comisiones conformadas por un número determinado de integrantes especialistas en un tema, y ellos son los que determinarán si la Ley propuesta es adecuada o no para el bienestar del país y sus habitantes.

Cómo hacer un ensayo

El ensayo es un texto escrito en prosa. Su objetivo es exponer de manera argumentativa, el punto de vista, las opiniones o posiciones de quien escribe ante un tema determinado

Los datos, hechos e información del ensayo deben ser objetivos, pero desde una perspectiva personal. Generalmente, la conclusión del tema es subjetiva. El ensayo por antonomasia expresa un punto de vista eminentemente personal, por ello, si se elabora en equipo es necesario llegar primero a un acuerdo sobre la posición que se expondrá y sustentará, así como sobre los argumentos con que se hará la defensa de las tesis propuestas.

Antes de redactar un ensayo, es necesario determinar qué información se precisa para buscarla y consignarla, registrando cuidadosamente las fuentes de donde se obtiene. Una vez que hayan conseguido la información, deben organizar las notas, las citas bibliográficas y todo el material que tengan.

Un ensayo debe ser ameno, dinámico, sencillo de comprender que promueva la difusión del tema.

Las características de los ensayos son:

- Abordan cualquier tema sociológico, histórico, filosófico, científico y los hay hasta humorísticos.
- Exponen y analizan un tema.
- Son breves.
- Son persuasivos.
- Son expresivos.
- Se busca que el texto sea de fácil lectura para el lector.
- El tono en que se redacta es confidencial, porque busca el acercamiento con el lector.
- El lenguaje debe ser adecuado al tema.
- Se dirige a un público no especializado en el tema, por lo que debe ser comprensible, aun cuando use terminología científica o técnica adecuada.
- En algunos casos se puede hacer uso de figuras literarias.

En un ensayo el autor es libre de expresar su opinión sobre el tema tratado, siempre que tenga un fundamento en la investigación, recopilación de datos y coherencia con el hecho.

Cómo consultar sitios electrónicos acerca de temas de álgebra

El **álgebra**, como rama de las matemáticas, entre otras cosas nos ayuda a resolver problemas relacionados con diferentes áreas del conocimiento, como son: ciencias naturales y exactas, económico-administrativas y sociales; en la vida diría también nos permite determinar el éxito o fracaso de producciones empresariales, industriales y agrícolas, además de predecir el comportamiento de diversos fenómenos naturales.

Para apoyar el aprendizaje de éste resulta de gran utilidad consultar libros y revistas, así como recursos digitales disponibles en línea: videos, animaciones, fotografías, entrevistas, líneas de ti-

empo, artículos de divulgación científica, etc., las posibilidades de consultar materiales en internet sobre diversos temas relacionados con el **álgebra** son muy numerosas. Sin embargo, aunque la cantidad de información electrónica disponible aumenta cada día más, no todo el material que está en la red es digno de confianza ni basa sus contenidos en información científica rigurosa o actual. Así, es importante evitar el riesgo de tomar por adecuado un material que podría mal informarnos. Para ello es indispensable verificar que

los recursos que consultamos estén avalados por instituciones serias; es decir, que provengan

de fuentes rigurosas.

Considera los siguientes puntos para seleccionar fuentes confiables cuando busques información sobre temas relacionados con el álgebra en línea.

- Revisa que se indique el nombre del autor o de la institución que respalda la información publicada. Prefiere las páginas de instituciones educativas, académicas, científicas y gubernamentales reconocidas.
- Identifica el país del cual proviene la información. Esto es importante en particular cuando investigas temas relacionados con tu país o con una comunidad en especial.
- Observa la manera en que está organizada la información en la página, si hay un discurso lógico y bien articulado en los materiales que se presentan.
- Verifica si en la página se indica la fecha de publicación del documento, de modo que puedas saber si es vigente.
- Revisa si se mencionan sitios de referencia o fuentes de las que proviene la información.

La siguiente tabla incluye opciones de sitios que son fuentes confiables de consulta sobre temas relacionados con las matemáticas. Puedes revisarlos al investigar los temas que se mencionan en las actividades del libro. También se incluyen algunas páginas relevantes cuyos contenidos están en inglés, pero cuentan con la opción de traducirlos al español. Varias de las instituciones mencionadas también cuentan con redes sociales en las que encontrarás noticias, información sobre artículos recientes y aplicaciones en la vida diaria.

Es probable que mientras realizas las diversas investigaciones que se solicitan en cada bloque encuentres algunos sitios más que cumplan con las características de una fuente confiable. Te invitamos a completar la tabla con las direcciones electrónicas de los sitios que te ayuden a profundizar tu conocimiento y tu interés por el **álgebra**.

Ejemplos de sitios confiables de consulta en temas de matemáticas	
Instituciones educativas reconocidas	
UNAM Universidad Nacional Autónoma de México	http://objetos.unam.mx
UNISON Universidad de Sonora	http://www.mat.uson.mx
IPN Instituto Politécnico Nacional	http://www.academico.cecyt7.ipn.mx/Alg/menus/bienvenida.html
CONAMAT Colegio Nacional de Matemáticas	https://www.youtube.com/watch?v=sbcSz3q0x4Q

MODELOS DE INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

En la formación de competencias, la evaluación está orientada a la mejoría del desempeño individual, es continua e integral, guarda estrecha relación con el proceso de aprendizaje y fomenta su concreción mediante el dominio de los conocimientos y el desarrollo de habilidades, actitudes y valores determinados. Enseguida se proporcionan ejemplos y formatos.

LISTA DE COTEJO

Es una enumeración de elementos que debe contener un producto de trabajo. Permite que, antes de elaborar el producto, el alumno sepa lo que se espera. Durante el proceso, puede revisar el producto y mejorarlo en función de lo solicitado.

1 LISTA DE COTEJO PARA LA EVALUACIÓN DE PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS			
2 CARACTERÍSTICAS	3 SÍ	3 NO	4 OBSERVACIONES
La carátula exhibe los datos de identificación: nombre completo, número de lista del alumno, grupo, título del trabajo y materia.			
Hay una presentación del portafolio, con sus propósitos de desarrollo.			
Existe un orden coherente y lógico de los trabajos presentados.			
Las conclusiones reflejan los alcances y la mejoría del desempeño propio.			
El diseño es uniforme y original, con recursos gráficos pertinentes.			

1. Se establece qué producto hará el estudiante.
2. Características que el producto deberá mostrar y que serán la base de su evaluación.
3. Se indica si el trabajo tiene o no las características deseables.
4. El evaluador hace observaciones de mejora.

GUÍA DE OBSERVACIÓN

Es una lista de muestras de los aprendizajes esperados. Es ideal para identificar las habilidades y registrar las actitudes y valores, así como para identificar los aspectos que hay que reforzar o fomentar.

1 GUÍA DE OBSERVACIÓN PARA: EVALUACIÓN DE EXPOSICIONES ORALES				
2 CRITERIOS	3 NUNCA	3 A VECES	3 SIEMPRE	4 LOGROS Y ASPECTOS
El expositor proyecta seguridad y dominio del tema.				
Se expresa con fluidez y naturalidad.				
Su lenguaje corporal es congruente con el discurso.				
Se apoya en los recursos tecnológicos para explicar el tema.				
Muestra respeto ante el público y maneja con madurez las objeciones.				

1. Se establece qué producto hará el estudiante.
2. Habilidades, actitudes y valores que el alumno deberá mostrar y que serán la base de su evaluación.
3. Se registra la frecuencia con la que el estudiante muestra el aprendizaje esperado.
4. El evaluador destaca los logros, indica los errores y cómo corregirlos.

RÚBRICA

Es un conjunto de criterios de desempeño y la descripción de sus niveles de dominio para valorar el aprendizaje y el grado de desarrollo de las competencias del estudiante.

RÚBRICA PARA EVALUACIÓN DE: PROYECTO DEL BLOQUE				
1 PROCESO A EVALUAR: Presentación del proyecto del bloque		2 RECOMENDACIONES PARA LA EVALUACIÓN: Coevaluación		
3 CRITERIOS Y EVIDENCIAS	4 NIVELES DE DOMINIO			
	INICIAL–RECEPTIVO	BÁSICO	AUTÓNOMO	ESTRATÉGICO
Comunican información relativa a un tema. Evidencia: Presentación del proyecto.	La introducción, el desarrollo y las conclusiones del proyecto se presentan incompletos e inconexos.	La introducción, el desarrollo y las conclusiones del proyecto se presentan de modo poco definido y desvinculado.	La introducción, el desarrollo y las conclusiones del proyecto se presentan de modo escueto, pero coherente.	La introducción, el desarrollo y las conclusiones del proyecto se presentan con claridad y articulación.
Ponderación: 40%	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos
Integran los principales conocimientos del bloque. Evidencia: Producto de trabajo del proyecto.	Los conocimientos del bloque que se integran son incompletos y con poca adecuación.	Los conocimientos del bloque que se integran son los mínimos necesarios.	Los conocimientos del bloque que se integran son suficientes.	Los conocimientos del bloque se integran con suficiencia, claridad y adecuación.
5 Ponderación: 40%	1 punto	2 puntos	3 puntos	4 puntos
Utilizan materiales de apoyo en la exposición. Evidencia: Material audiovisual.	El material de apoyo es insuficiente.	El material de apoyo es el mínimo necesario.	El material de apoyo es suficiente.	El material de apoyo es adecuado, suficiente y explicativo.
Ponderación: 20%	0.5 puntos	1 punto	1.5 puntos	2 puntos
Realimentación:				

1. Se menciona el objeto de evaluación: un producto o una competencia.
2. Sugerencias sobre cómo evaluar.
3. Se explican los criterios de desempeño o atributos y las evidencias o productos esperados.
4. El evaluador destaca los logros, indica los errores y cómo corregirlos.
5. Valor porcentual y los puntos asignados a cada nivel.
6. Comentarios sobre el aprendizaje y recomendaciones para mejorarlo.

LISTA DE COTEJO PARA LA EVALUACIÓN DE PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS			
CARACTERÍSTICAS	SÍ	NO	OBSERVACIONES

LISTA DE COTEJO/FORMATO COPIABLE

GUÍA DE OBSERVACIÓN PARA:

CRITERIOS	NUNCA	A VECES	SIEMPRE	LOGROS Y ASPECTOS

GUÍA DE OBSERVACIÓN/FORMATO COPIABLE

RÚBRICA PARA EVALUACIÓN DE:

PROCESO A EVALUAR:		**RECOMENDACIONES PARA LA EVALUACIÓN:**		
CRITERIOS Y EVIDENCIAS	**NIVELES DE DOMINIO**			
	INICIAL—RECEPTIVO	BÁSICO	AUTÓNOMO	ESTRATÉGICO
Ponderación:	puntos	puntos	puntos	puntos
Ponderación:	puntos	puntos	puntos	puntos
Ponderación:	puntos	puntos	puntos	puntos

RETROALIMENTACIÓN:

RÚBRICA DE EVALUACIÓN/FORMATO COPIABLE

BLOQUE 1

Evaluación diagnóstica (página 5)

1. **c)** **3.** **d)**

5. Debido a que son los números que utilizamos en la vida cotidiana.

7. Se obtendría un resultado erróneo.

En acción (Página 6)

A las 8:00 a.m. se registró una temperatura de 7°C.

Actividad de aprendizaje 1 (Página 6)

- **Números naturales:** un número natural es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto.
- **Números racionales:** es todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros, es decir, una fracción común $\frac{a}{b}$ con numerador *a* y denominador *b* distinto de cero.
- **Números irracionales:** es un número que no puede ser expresado, como una fracción $\frac{m}{n}$, donde *m* y *n* sean enteros y n sea diferente de cero.
- **Números reales:** el conjunto de los números reales incluye tanto a los números racionales (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales.
- **Números complejos:** es una entidad matemática que viene dada por un par de números reales, el primero *x* se denomina la parte real y al segundo la parte imaginaria.

Actividad de aprendizaje 2 (Página 9)

1. **a)** Irracional. **b)** Entero negativo y racional.
c) Irracional. **d)** Entero positivo y racional.

3. **a)** +$82 000 000 **b)** –316 m **c)** –3°C **d)** –$95 000

Actividad de aprendizaje 3 (Página 13)

1.

Igualdad	Propiedad
$x+9=9+x$	Conmutativa de la adición
$7+0=7$	Identidad de la adición
$63+(-63)=0$	Inversa de la adición
$x+y+8=(x+8)+y$	Asociativa de la adición
$5x=x\,(5)$	Conmutativa de la multiplicación
$1a=a$	Identidad de la multiplicación
$x(yz)=(xy)z$	Asociativa de la multiplicación
$(x+y)(w+z)=x(w+z)+y(w+z)$	Distributiva de la multiplicación

3. **a)** 6 **b)** –2 **c)** 5 **d)** –15 **e)** 0 **f)** –6 **g)** 4
h) –9 **i)** –10 **j)** 2.1 **k)** –4.6 **l)** –16.8 **m)** 3.3
n) –5.7

5. 65°C

Actividad de aprendizaje 4 (Página 15)

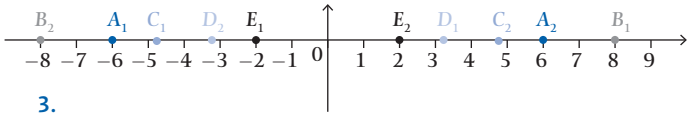
1. **a)** 35 **b)** 96 **c)** –27 **d)** 8.28 **e)** –22.94
f) –405 **g)** –18.6 **h)** –56.1 **i)** –4.16 **j)** –4
k) 0 **l)** ∞ **m)** 0 **n)** 5 **o)** –4 **p)** $-\frac{4}{5}$ **q)** $\frac{10}{27}$
r) $-\frac{276}{289}$ **s)** $-\frac{8}{63}$ **t)** $\frac{55}{55}$ **u)** $-\frac{8}{19}$

3. 14. $\overline{6}$ min

5. $11.95

En acción (Página 18)

1.



3.

Notación	Definición	Terminología
6>3	porque 6 – 3 es positivo	6 es mayor que 3
7<11	porque 7 – 11 es negativo	7 es menor que 11
1<3	porque 1 – 3 es negativo	1 es menor que 3
2<4	porque 2 – 4 es negativo	2 es menor que 4
−8<−2	porque –8 – (–2) es negativo	–8 es menor que –2

Actividad de aprendizaje 5 (Página 20)

1. **a)** 207 **b)** –5 **c)** 14 **d)** –7 **e)** $72.\overline{2}$ m/s
f) 24 500 cm^3

En acción (Página 20)

1. 8 848 m sobre el nivel del mar.

3. 32°F.

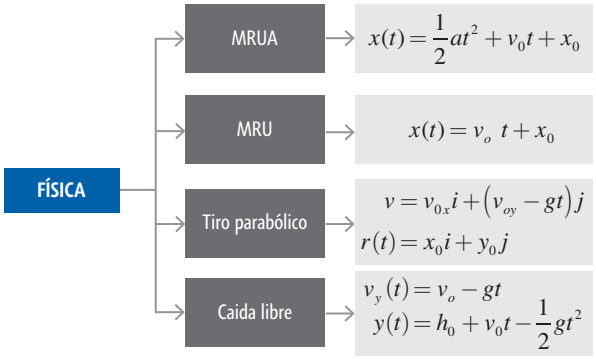
Para estas situaciones se ha desarrollado un modelo matemático para representarlas.

En acción (Página 23)

1. **a)** $4x+28$ **b)** $\frac{5}{8}y-7$ **c)** $x-3+10x$ **d)** $\frac{(p+q)}{(p-q)}$
e) A=bh **f)** $S=4\pi r^2$ **g)** $\frac{x}{a+b}$ **h)** $V=IR$
i) $P=\frac{F}{A}$ **j)** $P_t=R_t-C_t$ **k)** $°C=\frac{5}{9}(°F-32)$

En acción (Página 25)

1.



Habilidad matemática (Página 26)

1. a)

Serie de ejercicios (Página 27)

1. Son aquellos números que solo son divisibles entre la unidad y entre ellos mismos.

3.

- Números con el mismo signo: suma los números sin considerar el signo y antepón el signo común al resultado.
- Números con signos diferentes: sin considerar el signo, resta el número menor del mayor y coloca el signo del número con mayor valor numérico al resultado.

5. **a)** Se realizan las operaciones que están entre paréntesis de adentro hacia afuera.
b) Se evalúan todos los exponentes.
c) Se realizan las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
d) Finalmente, se ejecutan la suma y la resta, también de izquierda a derecha.

7. **a)** -100 **b)** $14999.\overline{3}$ **c)** 3 **d)** $\frac{7}{2}$

9. **a)** 540 **b)** 40 232 **c)** 32 718 **d)** 2 450

11. $970.

13. 5 defensas

Bloque 2

Evaluación diagnóstica (Página 35)

1. **a)** **3.** **b)**

5. Debido a que nos permiten conocer la forma en que varían dos cantidades y/o variables que se encuentran relacionadas.

7. Significa que existe una razón 1 a 1 entre dos cosas.

En acción (Página 36)

1.

Estado civil	Número	Porcentaje
Casado por primera vez	2 990	23%
Casado más de una vez	910	7%
Unión libre	2 210	17%
Viudo	780	6%
Divorciado o separado	1 690	13%
Soltero	4 420	34%

En acción (Página 37)

1. **El numerador.** Es el número de arriba, indica las partes que tenemos.
El denominador. Es el número de abajo, indica el número de partes en que dividimos a cada unidad.

3. Dos fracciones son equivalentes cuando tienen el mismo valor decimal. Las fracciones equivalentes representan la misma parte de una unidad o entero. Si las representamos en la recta numérica, corresponden al mismo punto.

5. Como un punto.

Actividad de aprendizaje 1 (Página 39)

1. **a)** 0.875 **b)** 78.6% **c)** 0.655 **d)** $\frac{766}{1}$ **e)** $\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{5}{6}$

3. $3.61\times10^6\ \text{km}^2$

Actividad de aprendizaje 2 (Página 41)

1. 25 **3.** 12.6 km **5.** 143.68 cm

7. $A=7\,127.\overline{27};\ B=4\,072.\overline{72}$

9. $\frac{6}{17}$

En acción (Página 42)

1. $10\ \frac{\text{mg}}{\text{h}}$ **3.** $11.\overline{6}\ \frac{\text{bacterias}}{\text{min}}$ **5.** $12.5\ \frac{\text{km}}{\text{L}}$

Actividad de aprendizaje 3 (Página 45)

1. x = 8.12 **3.** $x = 10.21$ **5.** x = 28

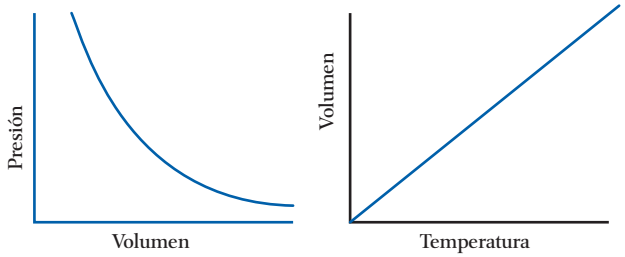
Actividad de aprendizaje 4 (Página 49)

1.

Fórmula	k
$R=kl$	0.125
$z=\frac{k}{u}$	90
$y=kx$	11.5
$W=\frac{k}{r^2}$	45
$S=kpq$	$\frac{1}{7}$

3. **k)** 1.88

5.



Habilidad matemática (Página 51)

1. b)

Habilidad matemática (Página 52)

1. Una tasa es una razón que compara dos cantidades que tienen unidades diferentes.

3. En la variación directa si un término aumenta el otro también aumenta y si disminuye el otro también disminuye; mientras que en la variación inversa cuando un término disminuye el otro aumenta y viceversa.

5. $\frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3}$

7. Yadira 18 años, Berenice 10 años.

9. 129289.578 bacterias

Bloque 3

Evaluación diagnóstica (Página 59)

1. d) **3. b)**

5.

Caracol

Girasol

Copos de nieve

Pavorreal

7. Una sucesión aritmética es una sucesión de números tales que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante.

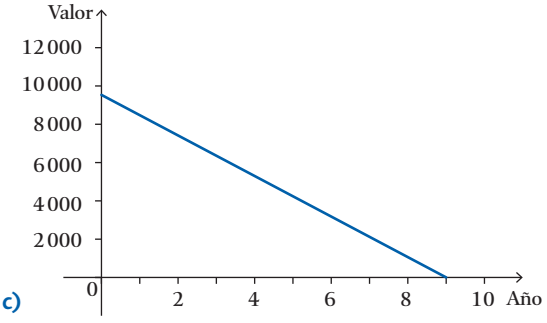
En acción (Página 60)

Año	0	1	2	3	4
Valor	$9 650	$8 575	$7 500	$6 425	$5 350

a) La expresión si sirve para calcular el valor de la computadora en cualquier año.

b) En el noveno año.

c)



Actividad de aprendizaje 1 (Página 63)

1.

a) $d=4;\ a_4=12;\ a_{100}=396;\ a_n=4(n-1)$

b) $d=5;\ a_4=16;\ a_{100}=496;\ a_n=1+5(n-1)$

c) $d=6;\ a_4=3;\ a_{100}=597;\ a_n=-15+6(n-1)$

d) $d=m;\ a_4=5+3m;\ a_{100}=5+99m;\ a_n=5+m(n-1)$

Actividad de aprendizaje 2 (Página 65)

a) Sí.

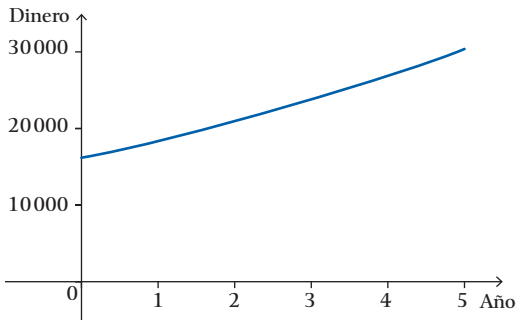
b) 1.13. Se corrobora que la razón de aumento anual es la misma y corresponde al 100% de lo ingresado más la tasa de interés anual.

c)

Año	1	2	3	4	5
Dinero ($)	$2 145	$2 423.85	$2 738.95	$3 095.01	$3 497.37

d) Sí la generaliza.

e)



Actividad de aprendizaje 3 (Página 68)

1. 126 **3.** 714

5. $a_n = 2 + 0.8(n-1)$

7. **a)** r=4, $a^7 = 8192;\ a_n = 2(4)^{n-1}$,

b) $r = \frac{1}{2};\ a_7 = 7;\ a_n = 448\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $r = \sqrt{2};\ a_5 = 4;\ a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$

d) $r = -3;\ a_5 = 486;\ a_n = 6(-3)^{n-1}$

9. \$106 288.2 **11.** 2484604.3 habitantes

Actividad de aprendizaje 4 (Página 72)

1. **a)** 1 533 **b)** 1.575 **c)** 441 **d)** $\frac{93}{125}$

3. 16376 antepasados

En acción (Página 74)

1. a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{14}{3}$

Habilidad matemática (Página 76)

1. **b)** **3.** **a)**

Serie de ejercicios (Página 77)

1. **Progresión numérica** Lista de términos dispuestos en un orden específico quedando definidos por una regla de dependencia determinada por el conjunto de los números naturales.
Progresión aritmética Es una sucesión de la forma:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, \ldots$$

3. Un modelo aritmético es la relación que se establece para definir valores que cumplen con una regla.

5. **a)** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, -\frac{1}{15}$

b) $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \frac{a_4}{5}, \frac{a_5}{6}, \frac{a_6}{7}, \frac{a_7}{8}$

c) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \frac{1}{49}$

d) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{14}, \frac{1}{16}$

f) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$,

g) $3, 3, \frac{5}{4}, \frac{7}{9}, \frac{9}{16}, \frac{11}{25}, \frac{13}{36}, \frac{15}{49}$

h) 24, 30, 40, $\frac{105}{2}$, 84, $\frac{720}{7}$

7. **a)** $\frac{5}{2}$ **b)** No es una serie geométrica **c)** 12 **d)** $\frac{16}{15}$

9. 2200

Bloque 4

Evaluación diagnóstica (Página 85)

1. **c)** **3.** **d)**

5. Es una ciencia dedicada a la recolección, la organización, la presentación, el análisis y la interpretación de datos, la cual se divide en estadística descriptiva e inferencial.

7. Es una parte representativa de la población que se selecciona para ser estudiada.

En acción (Página 86)

- El peor desempeño fue aproximadamente en el 2003
- El comportamiento del empleo se mantiene semiestable.
- 94 562.5
- Muestra una relación de proporcionalidad.

En acción (Página 88)

1. **a)** Desea estimar el costo total de los libros de texto adquiridos por un estudiante en un semestre.
b) La población corresponde a los estudiantes del colegio inscritos en el semestre.
c) La variable implicada es el costo total de todos los libros de texto adquiridos por un estudiante.
d) La muestra corresponde de 100 estudiantes seleccionados aleatoriamente.

3. **a)** Se tendría que incluir la definición tanto de muestra como de población.
b) Variable cualitativa.

En acción (Página 89)

a) La calificación más baja es 39. La calificación más alta es 98.
b) Existen 11 alumnos en el intervalo de 70 a 75.
c) El grupo tiene un promedio de 74.82.
d) La calificación con más frecuencia es 72.

En acción (Página 93)

1. $\bar{x} = 3.68$

Actividad de aprendizaje 1 (Página 97)

1. $\bar{x} = 5\,985.16$, $\tilde{x} = 5\,837.5$, No existe moda.

En acción (Página 98)

1. Analizando los datos estadísticos que se obtienen cada vez que ocurre el fenómeno.

3. Para conocer el rango de edad de mis amigos, para saber a qué edad corresponden los diversos juegos, juguetes y/o artículos electrónicos.

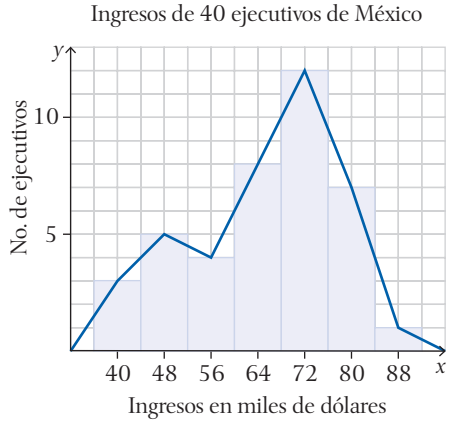
En acción (Página 100)

s = 2.387

En acción (Página 101)

Nivel de nicotina, s = 217.49; Pasajeros diarios, s = 79.50

En acción (Página 105)

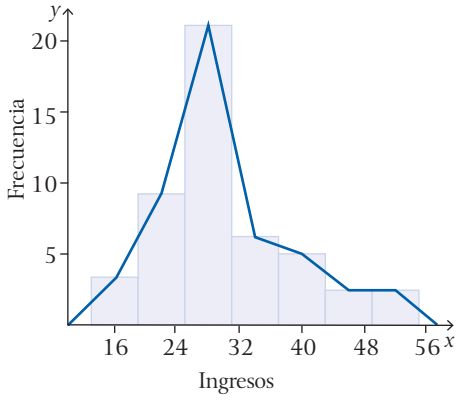


Actividad de aprendizaje 3 (Página 105)

1. a)

Número de clases	Clases	Conteo de clases	Frecuencia f	Marca de clase x
1	$12 \leq x < 18$	|	1	15
2	$18 \leq x < 24$	𝍸 𝍸 |	11	21
3	$24 \leq x < 30$	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	22	27
4	$30 \leq x < 36$	𝍸 ||	7	33
5	$36 \leq x < 42$	𝍸	5	39
6	$42 \leq x < 48$	||	2	45
7	$48 \leq x < 54$	||	2	51

b)



En acción (Página 108)

1. a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **3. a)** $\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{1}{2}$

En acción (Página 110)

a) Aleatorio. **b)** Determinístico. **c)** Determinístico.

En acción (Página 110)

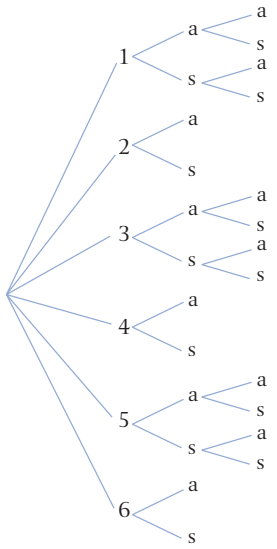
1. Sol o águila.

Actividad de aprendizaje 5 (Página 112)

1. a) S={10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34,36,38, 40,42,44,46,48,50}

b) S ={−3,2} **c)** S ={s, as, aas, aaa}

3.



En acción (Página 116)

1. a) $A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

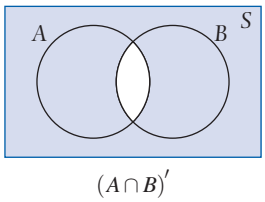
b) $B = \{(5,1),(1,5),(5,2),(2,5), (5,3),(3,5), (5,4),(4,5),(5,5),(5,6), (6,5)\}$

c) $A \cup B = \{(5,1),(1,5),(5,2),(2,5), (5,3),(3,5), (5,4),(4,5),(5,5),(5,6), (6,5),(6,6)\}$

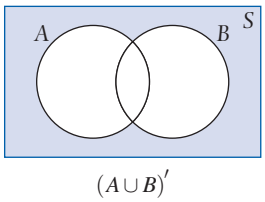
d) $A \cap B = \{(5,6), (6,5)\}$

3. $E = \{aas, asa, saa, aaa\}$

5.



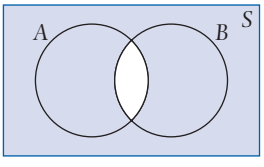
$(A \cap B)'$



$(A \cup B)'$

$(A \cap B)'$

$(A \cup B)'$



$A' \cup B'$

En acción (Página 118)

1. $\frac{3}{4}$

3. Probabilidad de sacar uno de fresa: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; Probabilidad de sacar uno de naranja: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

En acción (Página 120)

1. a) $\frac{1}{10}$ **b)** $\frac{1}{2}$

3. $s=\{500 \text{ sobres}\}$, $\frac{17}{20}$

En acción (Página 122)

1. $P(3s)=\frac{1}{8}$; $P(3S')=\frac{7}{8}$

En acción (Página 125)

1. a) $\frac{22}{25}$ **b)** $\frac{3}{25}$ **a)** $\frac{17}{50}$

Actividad de aprendizaje 6 (Página 126)

1. a) $P(\text{ambas})=0.8$ **b)** $P(\text{ninguno})=0.7$

3. $P(2V)=\frac{1}{36}$

5. $P(3\ USB)=\frac{91}{4141700}$

Habilidad matemática (Página 128)

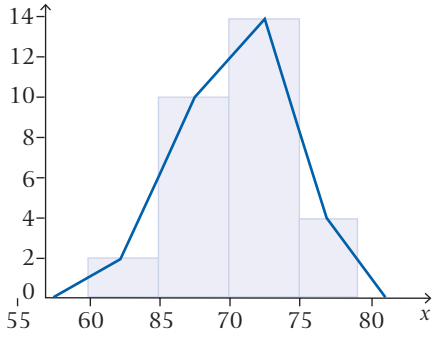
1. a)

Serie de ejercicios (Página 129)

1. La muestra es un subconjunto de la población.

3. Es el punto medio de cada clase y es el valor numérico que representa a cada clase.

5.



7.

Numero de clases	Clase	Frecuencia
1	$31 \le x < 35$	5
2	$35 \le x < 39$	9
3	$39 \le x < 43$	11
4	$43 \le x < 47$	10
5	$47 \le x < 51$	7
6	$51 \le x < 55$	3

9. $\frac{1}{2}$

11. Rango: 2.1, $s = 0.49$, $s^2 = 0.24$

Bloque 5

Evaluación diagnóstica (Página 139)

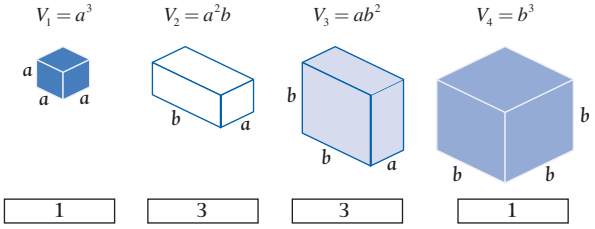
1. a) **3. a)**

5. Es una suma de términos de la forma ax^n llamados monomios donde a es una constante y n es un entero no negativo.

7. Cuando utilizamos la propiedad distributiva de las expresiones en sentido inverso al desarrollo de la multiplicación o de los productos notables.

En acción (Página 140)

1.



a) $V_T = a^3 + 3a^2b + 3ba^2 + b^3$

b) $V_T = (a+b)^3$

c) ii

d) $V_T = (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ba^2 + b^3$

En acción (Página 146)

1. a) 64 **b)** -27 **c)** 1 **d)** $\frac{16}{9}$ **e)** $\frac{9}{16}$ **f)** $\frac{1}{25}$ **g)** $\frac{343}{64}$ **h)** 64 **i)** 7.836410^{10}

En acción (Página 148)

1. a) -4 **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** 7 **d)** $2\sqrt{2}$ **e)** 8 **f)** 3

En acción (Página 150)

1. **a)** $x^{\frac{33}{35}}$ **b)** $2\sqrt{2}x^{\frac{9}{10}}$ **c)** $\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}y}$ **d)** $b^{\frac{1}{2}}$

e) $27\left(6^{\frac{2}{3}}\right)\dfrac{c^{12}}{d^{\frac{16}{15}}}$ **f)** $\dfrac{a^{15}}{b^{\frac{15}{2}}}$

En acción (Página 152)

1. **a)** $4x^3+5x$ **b)** $-2+2y+5y^2+3y^3+3y^4$

c) $5a+3a^2+2a^3$

En acción (Página 153)

1. **a)** $-2-2a+2a^2-3a^3$ **b)** $6-2y-3y^2+5y^3-6y^4$

c) $-5+2x-5x^2+2x^3$

En acción (Página 154)

1. **a)** $20a^8$ **b)** $56x^6$ **c)** $6y+6y^2-4y^3$

d) $15u^4-12u^5+6u^6$ **e)** $21-26x-15x^3$

f) $-2+5u-4u^2+u^3$ **g)** $9+6a+a^2$

h) $-15-2y+y^2$

3. $A=12-4x^2$

En acción (Página 156)

a) $4-12x+9x^2$ **b)** $49+28y+4y^2$

c) $36-60a+25a^2-12b+10ab+b^2$

En acción (Página 157)

a) a^2-121 **b)** p^2-3 **c)** $49-4x^2$

En acción (Página 158)

a) $28-11a+a^2$ **b)** $-10-3x+x^2$

c) $-39+60u+36u^2$

En acción (Página 159)

a) $512+576y+216y^2+27y^3$

b) $-343+588a-336a^2+64a^3$

En acción (Página 161)

a) $5(x-5)$ **b)** $6\left(y^2+4\right)$ **c)** $-2a^4\left(1+7a^4\right)$

En acción (Página 161)

a) $(2+u)\left(1+u^2\right)$ **b)** $(-3+x)\left(1+x^2\right)$

c) $(3+2y)\left(1+2y^2\right)$ **d)** $2\pi r(h+r)$ **e)** $\dfrac{1}{2}h(b_1+b_2)$

En acción (Página 163)

a) $(-3+a)^2$ **b)** $(2+u)^2$ **c)** $\left(b^2-1\right)^2$ **d)** $(7+3x)^2$

e) $(4+x)^2$ **f)** $(x-7)^2$

Actividad de aprendizaje 1 (Página 164)

1. **a)** $-5+8x-x^2$ **b)** $-\dfrac{1}{3}b(3+2b)$ **c)** $-\dfrac{1}{60}u(9+25u)$

d) a^2-3 **e)** $-6+15p-8p^2+p^3$

3. $5c^2\left(-4+2c-3c^4+c^5\right)$ **5.** $(5+4x)^2$

Actividad de aprendizaje 2 (Página 165)

1. $5x-13$ **3.** $(-4+x)(-3+x)$

En acción (Página 166)

1.

- $x^2-2x-15$
- $(x-5)(x+3)$
- Los factores indican que la variable puede tomar los valores de 5 o −3, en donde el valor es el único valor que daría una solución real debido a que *x* representa una distancia, y por lo tanto el resultado debe ser positivo.

En acción (Página 168)

1. **a)** $(x-6)(x-5)$ **b)** $(11+x)(33+x)$

c) $(1+y)(3+y)$ **d)** $(y-8)(y-7)$

En acción (Página 169)

a) $(-3+2x)(1+3x)$ **b)** $-(1+3x)(-5+4x)$

c) $(a-7)(7a+5)$ **d)** $(1+2y)(2+3y)$

Actividad de aprendizaje 4 (Página 170)

1. $\left(2y^2+3\right)\left(3y^2-2\right)$ **5.** $(2a^4+5)(5a^4+2)$

3. $-(2b^2-3)(4b^2+5)$ **7.** $\dfrac{1}{300}(3x-5)(12x+5)$

Actividad de aprendizaje 5 (Página 171)

1. **a)** $3(m-3)(m+3)\left(m^2+9\right)$ b) $x(x-7)(x+4)$

c) $3m(m+1)(m-1)$ d) $(y-2)(y+2)\left(y^2+1\right)$

e) $4a\left(1-a+a^2\right)\left(1+a+a^2\right)$ f) $\dfrac{1}{8}(2x+1)(4x-3)$

g) $\dfrac{1}{9}(3x-5)(3x+1)$

3. $E_c=67\ 408.95J$

En acción (Página 173)

a) $24x^2$ **b)** $-\dfrac{3}{4}x$ **c)** x^2-1 **d)** $\dfrac{4+x}{7(x+1)}$

e) $\dfrac{2(3+x)}{2+x}$ **f)** $\dfrac{5x(2x+3)}{2x-3}$

En acción (Página 175)

a) $\dfrac{5}{3}-\dfrac{13x}{3}+6x^2$ **b)** $\dfrac{1}{4}a^2\left(20-5a+8a^3\right)$ **c)** $-1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3x}{5}$

Actividad de aprendizaje 6 (Página 176)

1. 69 600

3. $5x+7$

5. a) $\dfrac{1}{6}$ $9-\dfrac{3}{x}-30x+2x^2$ b) $\dfrac{1}{6}\left(9-5a^2+4a^4\right)$

Habilidad matemática (Página 178)

1. **d)** **3.** **d)**

Series de ejercicios (Página 179)

1. Es la relación que se establece entre dos cantidades o expresiones algebraicas cuya diferencia es cero. Las propiedades de la igualdad son: aditiva, sustractiva, multiplicativa, divisora y sustitución.

3. Cada coeficiente del binomio de Newton es igual a uno de los coeficientes del triángulo de Pascal.

5. $A = x^2 + 12x + 35$

7.

a) $150 + 35x - 18x^2 + x^3$

b) $-18 + 39x - 62x^2 + 8x^3 + 31x^4 - 25x^5 + 6x^6$

c) $a^{2n}b^3 - a^{2n-1}b^4 - a^{2n-2}b^5 + a^{2n-5}b^8 + 2a^{1+n}b^5n^{n-2} - 2a^{n-1}b^7n^{n-2}$

d) $\frac{4x^5y^3}{15} + x^4y^4 - \frac{14x^3y^5}{27} - \frac{2x^2y^6}{9}$

9 **a)** $50abc\left(2ab^2 - 4c - 3bc + b^2c^2\right)$ **b)** $\left(-3 + m^{1/3}\right)^2$

c) $\frac{1}{24}\left(x^2 - 26xy + 4y^2\right)$ **d)** $(x-7)(x-8)(x-1)$

11.

a) 4 096

b) $a^{11} + 11a^{10}b + 55a^9b^2 + 165a^8b^3 + 330a^7b^4 + 462a^6b^5 + 462a^5b^6 + 330a^4b^7 + 165a^3b^8 + 55a^2b^9 + 11ab^{10} + b^{11}$

c) $6561j^8 + 17496j^7r + 20412j^6r^2 + 13608j^5r^3 + 5670j^4r^4 + 1512j^3r^5 + 252j^2r^6 + 24jr^7 + r^8$

d) $2048e^{11} + 45056e^{10}g + 450560e^9g^2 + 2703360e^8g^3 + 10813440e^7g^4 + 30277632e^6g^5 + 60555264e^5g^6 + 86507520e^4g^7 + 86507520e^3g^8 + 57671680e^2g^9 + 23068672eg^{10} + 4194304g^{11}$

13. $x + 5$

Bloque 6

Evaluación diagnóstica (Página 189)

1. **a)** **3.** **b)**

5. Es un comportamiento directamente proporcional entre la variable dependiente y el proceso, es decir, la pendiente de la expresión que modela el sistema no cambia para ningún punto de la evaluación.

7. De la primera ecuación se despeja alguna de las dos incógnitas y se sustituye en la segunda ecuación. Posteriormente se simplifican los términos semejantes y se resuelve para la variable que se tenga. Al obtener el valor de la variable, se sustituye el valor obtenido en el despeje inicial para determinar el valor de la segunda variable.

En acción (Página 192)

a) $x = 4$ **b)** $x = 3$ **c)** $u = -8$ **d)** $a = \frac{1}{3}$

En acción (Página 193)

1. Se denomina cosechadora o trilladora a una máquina dedicada a realizar labores de recolección de productos agrícolas. En sus comienzos, esta máquina era accionada por un tractor y servía para cortar el cultivo, que posteriormente era procesado por otros medios para extraer los granos, proceso denominado trilla o trillado. Actualmente una sola máquina autopropulsada realiza ambas operaciones.

3. La unión europea.

En acción (Página 194)

a) x = 7 **b)** $x = -6$

Actividad de aprendizaje 1 (Página 195)

1. Ancho de la banda = 30 cm; Dimensiones del cartel = 160 cm 3 200 cm.

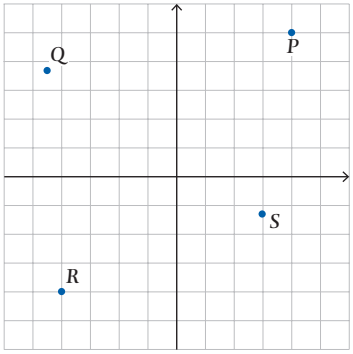
3. Oro puro = 8 onzas; Platino = 2 onzas.

5. 51, 52 y 53.

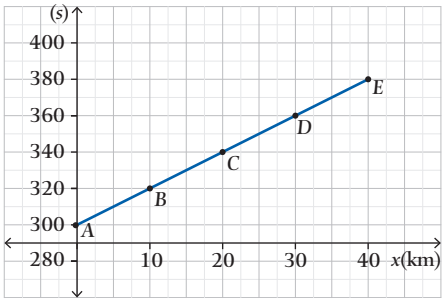
7. Litros comprados de gasolina roja 14 000; Litros comprados de gasolina verde 46 000.

En acción (Página 199)

1. Gráfica 1

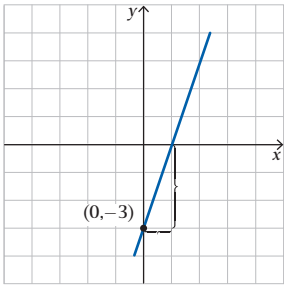


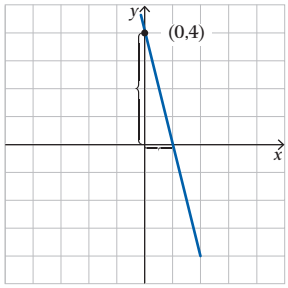
3. Gráfica 2: A(–4,2); B(3,–3.5); C(2.5,4); D(–5,–4).



En acción (Página 201)

1. Gráfica 1: y = 3x – 3 Gráfica 2: $y = -4x + 4$





Actividad de aprendizaje 3 (Página 204)

1. 50g **3.** 2.16

En acción (Página 205)

a) $y = 150x + 200$ **c)** $y = 100x + 1\,400$

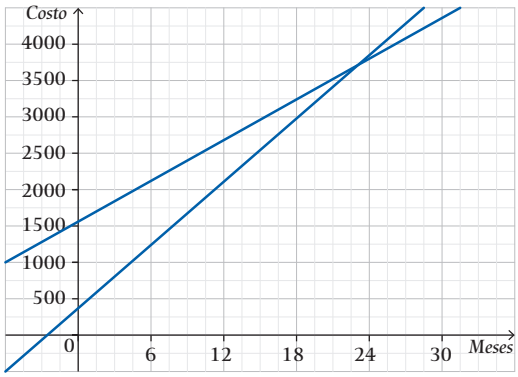
b)

x	y
0	200
6	1 100
12	2 000
18	2 900

d)

x	y
0	1 400
6	2 00
12	2 600
18	3 200

e)



f) El servicio de cable es más barato hasta los dos años de servicio. El servicio con receptor de antena es más barato después de los dos años de servicio.

En acción (Página 208)

1. a) 18 **b)** 29

En acción (Página 211)

1. (2,0)

En acción (Página 213)

1. (2,1)

3.

(c) $x-2y=9$ $-2x-3y=10$	(a) $x+y=5$ $x-y=1$	(b) $x+2y=4$ $x-2y=8$	(d) $x+y=3$ $x-y=-1$

En acción (Página 216)

1. (1,3)

En acción (Página 218)

I. 1. Las rectas se cortan en un solo punto. (1,2).

II. a) V **b)** F **c)** V

Actividad de aprendizaje 4 (Página 218)

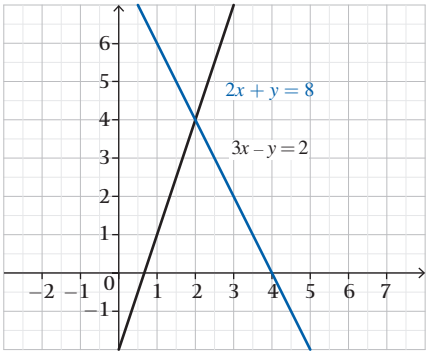
1. 28.875 km/h

3. Se invirtieron $8 000 y $17 000 al 7.5% y 6% respectivamente.

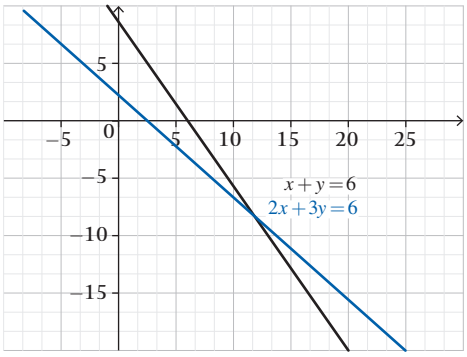
5. (37,57)

Actividad de aprendizaje 6 (Página 220)

1.



3.



En acción (Página 224)

1. a) $x = -2; y = 0,\ z = 3$

b) $x = -\frac{1300}{129}; y = \frac{820}{43}; z = \frac{5755}{43}$

c) $x = -2; y = -\frac{1}{3}; z = \frac{1}{3}$

En acción (Página 227)

a) No tiene solución. **b)** Una recta como solución.
c) Una única solución. **d)** No tiene solución.
e) No tiene solución.

Actividad de aprendizaje 7 (Página 228)

1. a) (x, y, z) = (1,1,2) **b)** (x, y, z) = (1,0,1)
c) (x, y, z) = (–1,0,1)
3. (x, y, z) = (5,2,30) millas
5. Todas las soluciones son admisibles.

Actividad de aprendizaje 8 (Página 230)

I. 1. (x, y, z)=(3,5,8)
II. 1. a) 2x+y+3z=70; 4x+5y+3z=110; 2x+3y+4z=95
b) (10,5,15) **c)** 30
3. a) La cantidad de tacos, burritos y refrescos.
b) La venta total por ciudad
c) $(x,y,z)=\left(\frac{9}{10},\frac{4}{5},1\right)$ **d)** 1873

Habilidad matemática (Página 233)

1. a)

Serie de ejercicios (Página 233)

1. Cuando dos ecuaciones tienen las mismas soluciones, se dice que son equivalentes.
3. Las funciones y las ecuaciones lineales son similares porque ambas tienen que lidiar con las coordenadas *x* y *y*, y los puntos en una gráfica, pero tienen diferencias en sus limitaciones, apariencia y propósito. Frecuentemente, las funciones te dan el valor de cualquiera de las dos variables, pero las ecuaciones lineales te piden resolver ambas variables.
5. Solución $(4,1)$

$$x+y=5$$
$$2x-3y=5$$

7. a) $y=3;\ m=0$ **b)** $x+3y=32;\ m=\frac{1}{3}$
c) $7x-11y=27;\ m=\frac{7}{11}$ **d)** $y=3;\ m=0$

9. a) $(-2,3)$ **b)** $(-3,8)$ **c)** $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right)$ **d)** $\left(-1,\frac{6}{5}\right)$

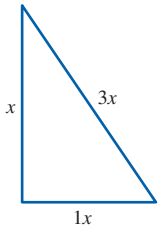
11. a) $(-7,-7,4)$ **b)** $(-17,43,30)$
c) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right)$ **j)** $\left(\frac{1}{3},\frac{7}{18},\frac{5}{6}\right)$
13. Tarjetas de deportes: $9, tarjetas de actores: $10
15. Pasos:3 cm, brincos: 4 cm, rodadas: 2cm.

Bloque 7

Evaluación diagnóstica (Página 243)

1. d) **3. c)**
5. $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+c=0$, con $a,b,c\neq 0$.
7. Por extracción por factor común, factorización, completando trinomio cuadrado perfecto y fórmula general para ecuaciones cuadráticas.

En acción (Página 244)



- Nombremos la altura como: x.
- $x^2+1=(x-3)^2$
- Es la expresión resultante al aplicar el Teorema de Pitágoras a nuestro problema.
- $x=\frac{4}{3}$

En acción (Página 246)

a) Ecuación cuadrática completa.
b) Ecuación cuadrática mixta.
c) Ecuación cuadrática completa.
d) Ecuación cuadrática mixta.
e) Ecuación cuadrática incompleta pura.
f) Ecuación cuadrática completa.
g) Ecuación cuadrática incompleta pura.
h) Ecuación cuadrática mixta.

Actividad de aprendizaje 1 (Página 247)

1. $x_1=-6\ ;\ x_2=5$
3. $x_1=-2\ ;\ x_2=3$

En acción (Página 249)

1. 50 ft

En acción (Página 250)

1. $x=2\pm\sqrt{2}$

En acción (Página 253)

1. $x=-2,\ 4$
3. $x=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

Actividad de aprendizaje 2 (Página 256)

I. 1. $x=0,\ 15$ **3.** $x^2-4x+5=0$
II. 1. a) 2012 **b)** $y=-\frac{30}{2012^2}(x-2012)^2+40$

En acción (Página 258)

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse como una ecuación de la forma:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

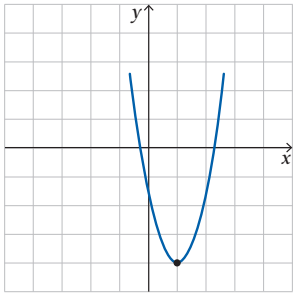
donde a, b y c (llamados términos) son números reales cualesquiera y a es distinto de cero (puede ser mayor o menor que cero, pero no igual que cero). El valor de b y de c sí puede ser cero.

En acción (Página 260)

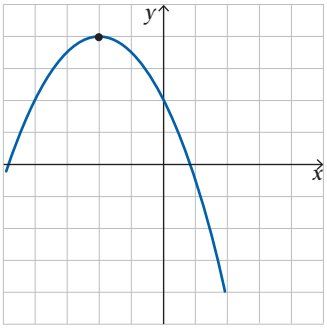
1.

Función	Discriminante de la ecuación respectiva	Número de intersecciones con el eje x	Coordenadas de las raíces
$y=x^2-6$	24	2	$(\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0)$
$y=x^2+18x+32$	196	2	$(-16,0),(-2,0)$
$y=-4x^2$	0	1	$(0,0)$
$y=x^2+\sqrt{32}x+4$	$D=32-4(1)(4)$	2	$\left(2(\pm1-\sqrt{2}),0\right)$

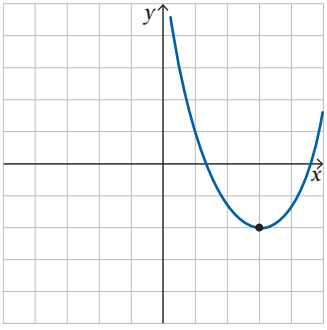
3.



$y=3x^2-6x-1$



$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+2$



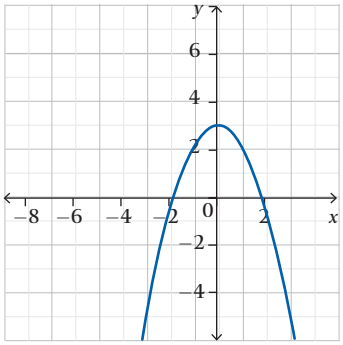
$y=x^2-6x+7$

En acción (Página 262)

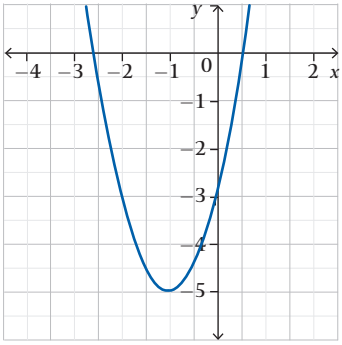
a) Real 5, imaginaria 3 **b)** Real 2, imaginaria –5
c) Real 0, imaginaria 3 **d)** Real 8, imaginaria 0

En acción (Página 262)

1. $x=\pm\sqrt{3}$



3.



$y=2(x+1)^2-5$

Habilidad matemática (Página 264)

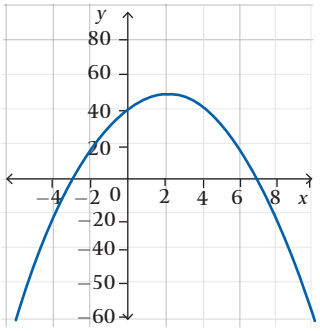
1. a)

Series de ejercicios (Página 265)

1. Se clasifican en:
- Incompletas puras: Para resolverlas se utiliza el despeje o factorización de una diferencia de cuadrados
- Incompletas mixtas: Para resolverlas utiliza el caso de factorización a través del factor común.
- Completas: Para resolverlas utiliza la factorización de un trinomio de la forma ax^2+bx+c .

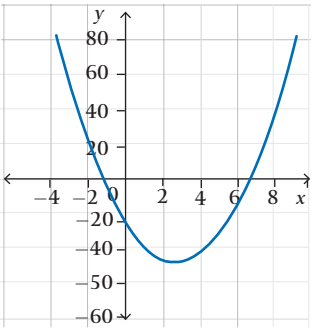
3. a = modifica la abertura de la parábola; b = mueve el vértice de la parábola diagonalmente; c = mueve el vértice de la parábola verticalmente.

5.



$y = -2x^2 + 8x + 42$

$y = -2(x-2)^2 + 50$



$y = 3x^2 - 18x - 21$

$y = 3(x-3)^2 - 48$

7. **a)** $x = -4, 1$ **b)** $x = -8, -3$
c) $x = -2, 5$ **d)** $x = -8, 2$

9. **a)** $y = -5\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{605}{4}$ **b)** $y = 5(x+1)^2 - 180$
c) $y = -4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 169$ **d)** $y = 2(x + 2)2 - 98$

11. **a)** $x = -5, 7$ **b)** $x = 5, 10$ **c)** $x = 3, 5$
d) $x = -4, 9$ **e)** $x = -4, 8$ **f)** $x = -4, 3$

13. $h_{max} = 569$

15. $y = -\frac{5}{9}(x-3)^2 + 5$

BIBLIOGRAFÍA

Bello, Ignacio. (2006). *Álgebra*. México: Thomson.

Johnson-Kuby. (2004). *Estadística elemental*. México: Thomson.

Larson-Hostetler. (2002). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.

Lehmann, Charles. (1992). *Álgebra*. México: Limusa.

Leilthold, Luis. (1994). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Harla.

Rees, Sparks, *et al*. (1992). *Álgebra*. México: McGraw-hill.

René Jiménez, M., Estrada Coronado, Rosa M. *Matemáticas 1*, (2016). Ciudad de México: Pearson.

René Jiménez, M., Estrada Coronado, Rosa M. *Matemáticas 2*, (2016). Ciudad de México: Pearson.

Smith, Stanley. (2001). *Álgebra*, México: Pearson.

Stewart, Redlin, Watson. (2001). *Precálculo*. México: Thomson.

Swokowski-Kole. (2006). *Álgebra y Trigonometría*, México: Thomson.

FUENTES ELECTRÓNICAS

Becerra Espinoza, Dr. José Manuel, Colegio de Matemáticas de la ENP-UNAM (s/f), "Productos notables y factorización". Disponible en: http://bit.ly/2y2lB3Z. Consultado el 20 de abril de 2018.

Becerra Espinoza, Dr. José Manuel, Colegio de Matemáticas de la ENP-UNAM (s/f), "Progresiones". Disponible en: https://bit.ly/2qIzzmL. Consultado el 20 de abril de 2018.

Becerra Espinoza, Dr. José Manuel, Colegio de Matemáticas de la ENP-UNAM (s/f), "Sistemas de ecuaciones y de desigualdades". Disponible en: https://bit.ly/2qXUqSZ. Consultado el 20 de abril de 2018.

BrainPop (1999-2018), "Crea un póster con ecuaciones lineales". Disponible en: https://bit.ly/2HqrDkm. Consultado el 20 de abril de 2018.

Canva (2018), "The brochure maker that makes you look professional". Disponible en: https://bit.ly/1Nj4Fba. Consultado el 20 de abril de 2018.

CONEVyT (s/f), "Eventos aleatorios y determinísticos". Disponible en: https://bit.ly/1kwmxMz. Consultado el 20 de abril de 2018.

Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia, Universidad Nacional Autónoma de México (2010), "Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas". Disponible en: https://bit.ly/2KcNJ7T. Consultado el 20 de abril de 2018.

Crearcrear (2015), "Crear diagramas de Venn online". Disponible en: https://bit.ly/2lTe09v. Consultado el 20 de abril de 2018.

Cram (2018), "Create a new flashcard set". Disponible en: https://bit.ly/1aYN1Sg. Consultado el 20 de abril de 2018.

Definición.de (2008-2018), "Espacio muestral". Disponible en: https://bit.ly/2ENNImY. Consultado el 20 de abril de 2018.

Descargar Prezi (2018), "Descargar Prezi gratis". Disponible en: http://bit.ly/2KwIMqi. Consultado el 20 de abril de 2018.

Descartes (s/f), "Resolución de ecuaciones". Disponible en: https://bit.ly/2HVU46E. Consultado el 20 de abril de 2018.

Descartes (2001), "Ecuaciones de primer grado con una incógnita". Disponible en: https://bit.ly/2HnU5Dj. Consultado el 20 de abril de 2018.

Descartes (2005), "División de enteros". Disponible en: https://bit.ly/2HMQwUw. Consultado el 20 de abril de 2018.

Descartes (2005), "Multiplicación de enteros". Disponible en: https://bit.ly/2Hc16Hm. Consultado el 20 de abril de 2018.

Descartes (2007), "Ecuaciones de primer grado". Disponible en: https://bit.ly/2lSlv4I. Consultado el 20 de abril de 2018.

Disfruta las matemáticas (2011), "Introducción al álgebra". Disponible en: https://bit.ly/2EYR5aw. Consultado el 20 de abril de 2018.

Disfruta las matemáticas (s/f), "Disfruta las matemáticas hojas de ejercicios". Disponible en: http://bit.ly/2JVgQfP. Consultado el 20 de abril de 2018.

Dovzhyk Mykhailo, OnlineMSchool (2011-2018), "Online calculadora. Solución de ecuaciones de segundo grado". Disponible en: https://bit.ly/2BD7HXu. Consultado el 20 de abril de 2018.

Facultad de Ingeniería, División de Ciencias Básicas, Universidad Nacional Autónoma de México (2011), "Factorización de un trinomio cuadrado perfecto y de trinomios de segundo grado". Disponible en: http://bit.ly/2HQurEv. Consultado el 20 de abril de 2018.

EasyCalculation (s/f), "Fórmula de probabilidad". Disponible en: https://bit.ly/2qytW9J. Consultado el 20 de abril de 2018.

EasyCalculation (s/f), "Calculadora online de probabilidad". Disponible en: https://bit.ly/2H1bPEk. Consultado el 20 de abril de 2018.

Educaplay (2018), "Crear relacionar columnas". Disponible en: https://bit.ly/2HsIW14. Consultado el 20 de abril de 2018.

Educarchile (x/f), "Formato y presentación del ensayo". Disponible en: http://bit.ly/2GYUaNX. Consultado el 20 de abril de 2018.

Educarchile (2013), "Razones y proporciones". Disponible en: https://bit.ly/2HgpHXm. Consultado el 20 de abril de 2018.

EDUCAYCREA (2018), "Cuadro comparativo, definición y ejemplos". Disponible en: https://bit.ly/2xlqwme. Consultado el 20 de abril de 2018.

El País (2016), "La intuición matemática de Ramanujan". Disponible en: https://bit.ly/2JcmHfu. Consultado el 20 de abril de 2018.

EL UNIVERSAL (2017), "Mexicana cura el pie diabético". Disponible en: https://bit.ly/2txZZtH. Consultado el 20 de abril de 2018.

EqsQuest (2017), "Calculadora de factorización". Disponible en: (https://bit.ly/2F6VYhN. Consultado el 20 de abril de 2018.

Facultad de Estudios Superiores, Universidad Nacional Autónoma de México (s/f), "Operaciones con polinomios". Disponible en: http://bit.ly/2vEPG9Y. Consultado el 20 de abril de 2018.

Geogebra (s/f), "Calculadora gráfica". Disponible en: https://bit.ly/2EZ3rPP. Consultado el 20 de abril de 2018.

Geogebra (s/f), "Solución gráfica de ecuaciones de 3 × 3". Disponible en: https://bit.ly/2KfJN6e. Consultado el 20 de abril de 2018.

Geogebra (2018), "Descubre las matemáticas con Geogebra". Disponible en: http://bit.ly/2HDgJ7S. Consultado el 20 de abril de 2018.

Giorgio Arcidiacono (2012-2018), "Calculadora estadística: dispersión". Disponible en: ttps://bit.ly/2GZGdeu. Consultado el 20 de abril de 2018.

Gliffy (s/f), "Crea tu mapa conceptual". Disponible en: https://bit.ly/2H9LuEp. Consultado el 20 de abril de 2018.

Google (2018), "Subir videos". Disponible en: https://bit.ly/1ESb6wS. Consultado el 20 de abril de 2018.

Helping with math (2016), "Number line generator". Disponible en: https://bit.ly/2mdWFl9. Consultado el 20 de abril de 2018.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2012), "Glosario de estadística básica". Disponible en: https://bit.ly/2v9H5vz. Consultado el 20 de abril de 2018.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2018), "México en cifras, información nacional, por entidad federativa y municipios". Disponible en: https://bit.ly/1kSHSEG. Consultado el 20 de abril de 2018.

Instituto Politécnico Nacional (2009), "Álgebra, unidad de aprendizaje". Disponible en https://bit.ly/2w3QW6G. Consultado el 20 de abril de 2018.

Intemodino group (2018), "Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita". Disponible en: https://bit.ly/2KddDZc. Consultado el 20 de abril de 2018.

Ivoox (2018), usuario: CatastrofeUltravioleta, "Catástrofe Ultravioleta – 16 Raro". Disponible en: https://goo.gl/mZFRH5. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Convertir decimales a porcentajes: 0.601”. Disponible en: https://bit.ly/2qHAjIz. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Diferencias entre ecuaciones y funciones”. Disponible en: https://bit.ly/2tOeerO. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “División larga de polinomios”. Disponible en: https://bit.ly/2IpRgOW. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Ejemplo resuelto: resolver proporciones”. Disponible en: https://bit.ly/2HyiUvy. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Ejemplo resuelto: series aritméticas (expresión como suma)”. Disponible en: https://bit.ly/2JbmjOc. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Encontrar un porcentaje”. Disponible en: https://bit.ly/2JZNtJg. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Introducción a la estadística: media, mediana y moda”. Disponible en: https://bit.ly/2JxnAAj). Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “La fórmula cuadrática”. Disponible en: https://bit.ly/2KcZc7g. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Medidas de dispersión: rango, varianza y desviación estándar”. Disponible en: https://bit.ly/2JJZ7Yk. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Los diagramas de Venn y la regla de la suma”. Disponible en: https://bit.ly/2GXDTc3. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Operaciones básicas con conjuntos”. Disponible en: https://bit.ly/2v95ilu. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Problema de sucesión aritmética”. Disponible en: https://bit.ly/2K45gyM. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Propiedad del producto cero”. Disponible en: https://bit.ly/2vOQ5qI. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Razones, tasas y proporciones”. Disponible en: https://bit.ly/2JX72II. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Resolución de sistemas de ecuaciones por medio de gráficas”. Disponible en: https://bit.ly/2G3nsJP. Consultado el 20 de abril de 2018.

Khan Academy (2018), “Sumar polinomios”. Disponible en: https://bit.ly/2Hkb7yi. Consultado el 20 de abril de 2018.

Knovio (2018), “Video, online presentations, and multimedia. Easy. Engaging. Smart”. Disponible en: https://bit.ly/2DRFvio. Consultado el 20 de abril de 2018.

Mabel Soriano, Marta (2013), “Crear folletos en línea gratis”. Disponible en: http://bit.ly/2JaUo0O. Consultado el 20 de abril de 2018.

Matemáticas IES (2006-2018), “Ejercicios, apuntes y videos de 3 × 3”. Disponible en: https://bit.ly/2HYIoQO. Consultado el 20 de abril de 2018.

Mathisfun (2016), “Regla interactiva”. Disponible en: https://bit.ly/2HcgRtO. Consultado el 20 de abril de 2018.

Microsoft (2018), “Crear un histograma en Excel”. Disponible en: https://bit.ly/2HIKFre. Consultado el 20 de abril de 2018.

Monterey Institute for Technology and Education (s/f), “Simplificando expresiones racionales”. Disponible en: http://bit.ly/2vIaJsf. Consultado el 20 de abril de 2018.

Numberempire (2018), “Calculadora de estadísticas”. Disponible en: https://bit.ly/2GW2bTu. Consultado el 20 de abril de 2018.

Padlet (s/f), “Padlet”. Disponible en: https://bit.ly/298259U. Consultado el 20 de abril de 2018.

Pérez Díaz, Julio, Instituto de Geografía y Demografía CSIC (s/f), “Cocientes demográficos: tasas, probabilidades, razones y proporciones”. Disponible en: https://bit.ly/2HKvs0E. Consultado el 20 de abril de 2018.

PLANETCALC (s/f), “Progresión aritmética”. Disponible en: https://bit.ly/2qP0wFe. Consultado el 20 de abril de 2018.

Portal Académico CCH, Universidad Nacional Autónoma de México (2017), “Introducción”. Disponible en: https://bit.ly/2qKsjqA. Consultado el 20 de abril de 2018.

Portal Académico CCH, Universidad Nacional Autónoma de México (2017), “Prioridad de los operadores aritméticos”. Disponible en: https://bit.ly/2EWNY2U. Consultado el 20 de abril de 2018.

Portal Académico CCH, Universidad Nacional Autónoma de México (2017), “Significado de los números reales”. Disponible en: https://bit.ly/2EYwSBU. Consultado el 20 de abril de 2018.

Portal Académico CCH, Universidad Nacional Autónoma de México (2017), “Sucesiones”. Disponible en: https://bit.ly/2JdAmmy. Consultado el 20 de abril de 2018.

Powtoon (2012-2018), “Create Awesome videos & Presentations”. Disponible en: https://bit.ly/2j7j4Ki. Consultado el 20 de abril de 2018.

Prezi (2018), “Diseñado para los que no son diseñadores”. Disponible en: https://bit.ly/1eK1jrJ. Consultado el 20 de abril de 2018.

Proceso (2017), “Alumna de la UNAM crea helicóptero para la NASA que volará en Marte”. Disponible en: https://bit.ly/2qJ2irA. Consultado el 20 de abril de 2018.

Profesor en línea (2015), “Cálculo o medición de la probabilidad”. Disponible en: https://bit.ly/2Hy18Gn. Consultado el 20 de abril de 2018.

ProProfs (2005-2018), “Create flashcards”. Disponible en: https://bit.ly/2GVFy1K. Consultado el 20 de abril de 2018.

ProProfs (2005-2018), “Create online quiz”. Disponible en: http://bit.ly/2Jpy0C0. Consultado el 20 de abril de 2018.

Proyecto Arquímedes (s/f), “Funciones cuadráticas y sus gráficas”. Disponible en: https://bit.ly/2HuOBmu. Consultado el 20 de abril de 2018.

Proyecto Descartes (s/f), “Experimentos aleatorios y deterministas”. Disponible en: https://bit.ly/2qvgpk2. Consultado el 20 de abril de 2018.

Proyecto Descartes (s/f), “Medidas de centralización y de posición”. Disponible en: https://bit.ly/2qwi1ds. Consultado el 20 de abril de 2018.

Proyecto Descartes (s/f), “Sucesos y operaciones con sucesos”. Disponible en: https://bit.ly/2GYhJ9g. Consultado el 20 de abril de 2018.

Proyecto Descartes (s/f), “Varianza y desviación típica”. Disponible en: https://bit.ly/2qu02Dq. Consultado el 20 de abril de 2018.

Quizworks (2018), “Creador de cuestionarios on line”. Disponible en: https://bit.ly/2ErnXbC. Consultado el 20 de abril de 2018.

Red universitaria de aprendizaje, Universidad Nacional Autónoma de México (2017), “Red Universitaria de Aprendizaje MX”. Disponible en: http://objetos.unam.mx. Consultado el 20 de abril de 2018.

Salud Fundación Carlos Slim (2013), "Dra. Matilde Petra Montoya Lafragua, primera médica mexicana". Disponible en: https://bit.ly/2FvM9ir. Consultado el 20 de abril de 2018.

SEP (2018). Lecciones de Habilidades socioemocionales. Construye-T. Recuperado de http://www.construye-t.org.mx/lecciones (Consultado el 28 de abril de 2018).

ThinkLink (s/f), "ThinkLink". Disponible en: (https://bit.ly/1darwli. Consultado el 20 de abril de 2018.

Universidad de Sonora (s/f), "Página principal del Departamento de Matemáticas". Disponible en: http://www.mat.uson.mx. Consultado el 20 de abril de 2018.

Universidad Nacional Autónoma de México (2014), "Operaciones básicas con signos de agrupación". Disponible en: https://bit.ly/2HaAxIV. Consultado el 20 de abril de 2018.

Universidad Nacional Autónoma de México (2014), "Operaciones básicas por orden de prioridad". Disponible en: https://bit.ly/2qHWs99. Consultado el 20 de abril de 2018.

Universidad Nacional Autónoma de México (2013), "Apoyo académico para la educación media superior". Disponible en: https://bit.ly/2EWNY2U. Consultado el 20 de abril de 2018.

Wideo (2013-2017), "Crea videos animados y presentaciones profesionales. Fácil y en minutos". Disponible en: https://bit.ly/2uTTe7T. Consultado el 20 de abril de 2018.

Wwwhatsnew (2005-2018), "Otras 8 herramientas para crear mapas mentales en internet". Disponible en: https://bit.ly/2otbnTg. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2009), usuario: izakovs, "Remember The Titans [Official Trailer]". Disponible en: https://goo.gl/Jqzf3t. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2011), usuario: Kamijo, Mercedes, "Tutorial Proprofs Parte 1". Disponible en: https://bit.ly/1w5tBop. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2013), usuario: Movieclips Trailer Vault, "Glory Road (2006) Official Trailer #1 – Josh Lucas HD". Disponible en: https://bit.ly/2Jrkg8U. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2014), usuario: Principia, "Crea materiales de autoestudio con Quizlet". Disponible en: https://bit.ly/2GHCDVX. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2015), usuario: Liviano Solís, Daniel, "3. Clasificación de los números". Disponible en: https://bit.ly/2Hbnwc1. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2015), usuario: Reyes Balderas, Eliseo, "Recta numérica en Geogebra". Disponible en: https://bit.ly/2HgcGwY. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2016), usuario: Trailers In Spanish, "El hombre que conocía el infinito". Disponible en: https://bit.ly/2K4sMMe. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2017), usuario: AvRam Productions, "Mexicano busca llegar a las ESTRELLAS, Juan Alberto Guevara – AvRam Studio #13". Disponible en: https://bit.ly/2HPzTrj. Consultado el 20 de abril de 2018.

YouTube (2017), usuario: Hacia el Espacio, "Entrevista a Regina Apodaca". Disponible en: https://bit.ly/2HLogBD. Consultado el 20 de abril de 2018.

Zoho (2018), "Zoho Show". Disponible en: https://bit.ly/2Fj1P3B. Consultado el 20 de abril de 2018.

HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 1

Números y operaciones aritméticas

Nombre: _____

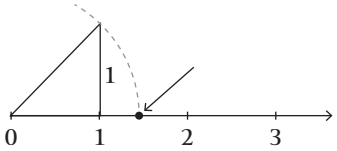
Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. Los números positivos y el cero sólo se utilizan en la parte de las matemáticas llamada:

a) Cálculo.
b) Álgebra.
c) Geometría.
d) Aritmética.

2. Dada la figura siguiente, ¿qué número real representa el punto señalado por la flecha?



a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) 1.3
d) 1.2

3. El simétrico o inverso aditivo del número 1 235 es:

a) –1 235
b) $\frac{1\,235}{1}$
c) 5 321
d) $\frac{1}{1235}$

4. Son todos los números que conocemos y que se asocian a cada punto de la recta numérica.

a) Números reales.
b) Números naturales.
c) Números racionales.
d) Números irracionales.

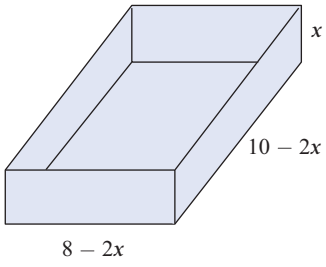
5. Una máquina de ferrocarril realiza los siguientes recorridos: 2.5 kilómetros a la derecha de un observador, luego 5.8 kilómetros a la izquierda de éste, enseguida se mueve y queda a –0.3 km de su punto de partida y finalmente recorre 4 kilómetros a la derecha. ¿Cuál fue su posición final?

a) En el origen.
b) 3.7 km a la derecha.
c) 3 km a la izquierda.
d) 3.3 km a la derecha.

6. Calcula el valor de la siguiente expresión numérica: $[32-(13-7)-12]\times 3=$

7. Dos representantes de ventas de una cierta compañía farmacéutica viajan del aeropuerto de la CDMX a los aeropuertos de Monterrey y Guadalajara respectivamente y en su primer viaje coinciden en el aeropuerto de la CDMX. Si uno de ellos viajará cada 6 semanas y el otro viajará cada 8, ¿cuántas semanas tendrán que pasar para que se vuelvan a encontrar en el aeropuerto de la CDMX?

8. Escribe la expresión algebraica que calcula el volumen de la siguiente caja y calcula el volumen para un valor de $x = 1$ centímetro.



HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 2

Razones y proporciones

Nombre: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. Representa 75% de $\frac{16}{9}$.

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{9}{4}$

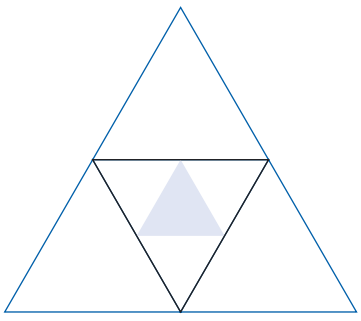
2. Un estudiante contestó correctamente 13 de 20 preguntas en un examen. ¿Qué porcentaje representa el número de respuestas incorrectas?

a) 53% b) 35% c) 65% d) 3.5%

3. Una institución financiera cobra por un crédito 16.5% anual fijo.

a) ¿Cuánto cobra de interés mensualmente?
b) ¿Cuál es el costo del interés anual simple si se cobra al cliente 16% de impuesto al interés de la institución como valor agregado?
c) ¿Qué capital total se pagaría en un año por un crédito de 50 000 pesos?

4. Si la superficie del triángulo mayor es 1, ¿qué fracción del área total representa el triángulo que tiene color negro?

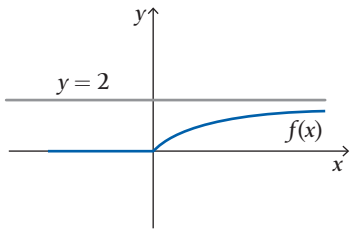


5. Un automóvil puede recorrer 370 kilómetros con 60 litros. ¿Cuál es la tasa de rendimiento del automóvil?

6. Una inversión bursátil de 2 000 000.00 de pesos pierde 3% cierto día, y al día siguiente gana el 1.5%. ¿Cuál fue el resultado final de la inversión?

7. Cierta cantidad F varía directamente proporcional al producto de $q_1 q_2$ e inversamente proporcional a r^2. Si k es una constante de proporcionalidad para este caso, escribe una expresión algebraica que describa esta situación.

8. A un estudiante le toma hacer una tarea 2 horas, mientras que otro afirma que lo puede hacer en 1 hora. ¿Cuánto tiempo tomará realizar la tarea entre los dos estudiantes?



HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 3

Sucesiones y series

Nombre: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. Es una lista de términos que obedecen a cierto patrón específico y que queda definida por una regla de dependencia definida por los números naturales.

a) Serie.
b) Arreglo.
c) Sucesión.
d) Operación.

2. En la serie -3, -1, 1, 3,… el décimo término debe ser:

a) 13
b) 15
c) 19
d) 17

3. La suma de los 50 primeros términos de la sucesión 2, 6, 10, 14,… es:

a) 189
b) 194
c) 196
d) 198

4. En la serie 2, 6, 18, 54,… el décimo término debe ser:

a) 19683
b) 39366
c) 39636
d) 39663

5. El valor inicial de un teléfono celular es de 10000 pesos. Si se deprecia 650 pesos por año. Calcula su valor después de 6 años.

6. ¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 3, 5, 7,… se tienen que sumar para obtener 2600?

7. Calcula el quinto término de la sucesión geométrica 1, 0.5, 0.25,…

8. Determina la suma de los 5 primeros términos de la sucesión geométrica 1, 0.5, 0.25,…

HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 4

Modelos de probabilidad y estadística

Nombre: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. la parte de la estadística que interpreta los valores resultantes de la descripción de una población es _____.

a) gráfcos
b) parámetro
c) estadística inferencial
d) estadística descriptiva

2. Es el valor central de un conjunto de datos.

a) Moda.
b) Media.
c) Mediana.
d) Desviación.

3. El evento extraer una carta de una baraja representa una variable _____.

a) discreta
b) continua
c) cualitativa
d) cuantitativa

4. Es la probabilidad de obtener un 4 o más al lanzar un dado.

a) 50%
b) 60%
c) 30%
d) 20%

5. Encuentra la media aritmética, la mediana, y la moda del conjunto de datos siguiente.

35, 42, 35, 40, 40, 37, 45, 45, 38, 41

6. Calcula la desviación estándar del conjunto de datos siguiente.

158	179	169	165	173
176	138	154	175	150
145	171	138	146	169
145	161	162	177	169

7. Si la $p = (A) = 0.20$, $p = (B) = 0.30$ y $p(A \text{ y } B) = 0.1$, encuentra $p = (A \text{ o } B)$.

8. Una caja contiene dos canicas rojas, una azul y tres verdes. Si se extraen dos canicas al azar, ¿cuál es la probabilidad que una sea roja y la otra azul?

HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 5

Operaciones algebraicas

Nombre: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. Expresión algebraica que resulta de la suma o resta de uno o más monomios.

a) Arreglo.
b) Igualdad.
c) Polinomio.
d) Términos semejantes.

2. Son fórmulas para obtener productos de multiplicaciones de una manera más rápida y eficiente.

a) Relaciones.
b) Transformaciones.
c) Procesos generales.
d) Productos notables.

3. Es el resultado de la operación $(5x^3 + 2x - 1) + (3x^3 - 2x^2 + 8) - (-3x^3 + 6x^2 + 5x - 3)$.

a) $11x^3 + 8x^2 - 3x + 10$
b) $11x^3 + 8x^2 + 3x - 10$
c) $11x^3 - 8x^2 - 3x + 10$
d) $11x^3 + 8x^2 - 3x - 10$

4. La factorización de $2x^2 - 4x - 30$ es:

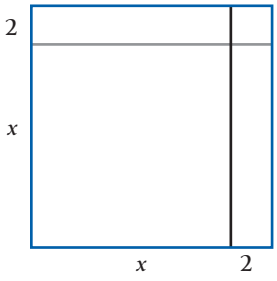
a) $2(x - 3)(x - 5)$
b) $2(x + 3)(x - 5)$
c) $2(x - 3)(x + 5)$
d) $2(x + 3)(x + 5)$

5. Desarrolla correctamente los siguientes productos notables:

a) $\left(x - \sqrt{y}\right)^2 =$

b) $\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)^2 =$

6. Encuentra el área total de la siguiente figura:



7. Determina el cociente y el residuo de $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}$.

8. Un productor estima que el costo de producción en pesos de x artículos es $C(x) = 26000 + x + 0.010x^2$. Determina el costo promedio de producir 50 unidades.

HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 6

Ecuaciones lineales

Nombre: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. Representa una ecuación lineal en una variable.

a) $ax + b = 0$
b) $y = ax + b$
c) $ax^2 + b = 0$
d) $a\sqrt{x} + b = 0$

2. La intersección de una recta con el eje *x* representa:

a) La solución.
b) Un número real.
c) Un punto cualquiera.
d) La ordenada en el origen.

3. Cuando un sistema de ecuaciones de 2×2 no tiene solución se llama:

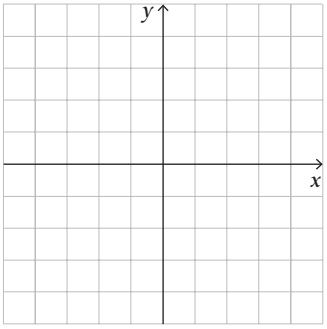
a) Consistente.
b) Dependiente.
c) Inconsistente.
d) Independiente.

4. La ecuación $2x - y + 3 = 0$ y la ecuación $2x - y - 1 = 0$:

a) Son independientes.
b) No tienen solución.
c) Tienen una solución.
d) Tienen infinitas soluciones.

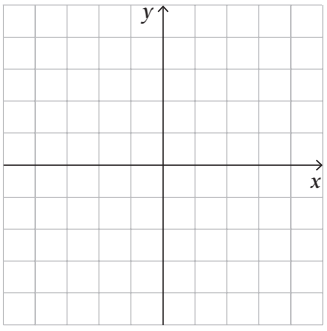
5. Una máquina **A**, la cual sirve para poner remaches, puede realizar cierto trabajo en 2 horas y otra **B** puede hacer lo mismo en 3 horas. ¿Cuánto tiempo utilizarán simultáneamente ambas máquinas para hacer dicho trabajo?

6. Expresa la ecuación lineal $2x - y - 1 = 0$ como una función lineal y bosqueja su gráfica.



7. Utiliza el método gráfico para encontrar la solución del sistema

$$2x - y = 1$$
$$3x + 2y = 12$$



8. Por el método que más se te facilite resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x - y + 3z = -2$$
$$x + 2y + 2z = 6$$
$$3x - 5y + z = 10$$

HETEROEVALUACIÓN BLOQUE 7

Ecuaciones cuadráticas

Nombre: _____

Grupo: _____ Fecha: _____

A continuación, encontrarás algunas preguntas acerca de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que habrás integrado a tus saberes después de haber estudiado este bloque. Contéstalas y recorta la hoja para entregarla a tu profesor.

1. Es una ecuación cuadrática pura.

a) $ax^2 + c = 0$
b) $ax^2 + bx = 0$
c) $ax^2 + bx + c = 0$
d) $y = ax^2 + bx + c$

2. Es una ecuación cuadrática completa.

a) $ax^2 + c = 0$
b) $ax^2 + bx = 0$
c) $ax^2 + bx + c = 0$
d) $y = ax^2 + bx + c$

3. En la expresión $y = ax^2 + bx + c$, si $a > 0$ significa que:
a) La curva abre hacia abajo.
b) La curva abre a la derecha.
c) La curva abre hacia arriba.
d) La curva abre a la izquierda.

4. La forma estándar $y = a(x - h)^2 + k$ de la función cuadrática $y = 2x^2 + 4x - 1$ es:

a) $y = 2(x - 1)^2 + 3$

b) $y = 2(x + 1)^2 + 3$

c) $y = 2(x - 1)^2 - 3$

d) $y = 2(x + 1)^2 - 3$

5. Encuentra las soluciones para la ecuación $2x^2 + 4x = 0$.

6. Un terreno rectangular mide 3 metros más de largo que de ancho. Su área es de 108 metros cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?

7. Calcula el discriminante $D = b^2 - 4ac$ y concluye si la ecuación $2x^2 - 3x - 2 = 0$ tiene soluciones reales.

8. ¿Cuál debe ser la velocidad inicial de una pelota que se lanza hacia arriba para que alcance una altura máxima de 10 metros?

Álgebra

OPERACIONES ARITMÉTICAS			
$a(b+c)=ab+ac$	$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ad+\frac{bc}{bd}$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$

EXPONENTES Y RADICALES			
$a^m\ a^n=a^{mn}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$(a^m)^n=a^{mn}$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
$(ab)^n=a^nb^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$		$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

FACTORIZACIONES ESPECIALES		
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

PRODUCTOS NOTABLES	
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Teorema del binomio

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}b^n$$

donde $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ y $n!=1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)n$

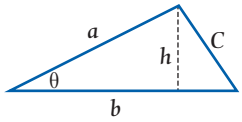
FÓRMULA CUADRÁTICA	VALOR ABSOLUTO
Si $ax^2+bx+c=0$ la solución para x es: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Para toda $a>0$, entonces: $\lvert x\rvert=a$ significa que $x=a$ o $x=-a$; $\lvert x\rvert<a$ significa que $-a<x<a$; $\lvert x\rvert>a$ significa que $x>a$ o $x<-a$

Geometría básica

FIGURAS GEOMÉTRICAS ELEMENTALES

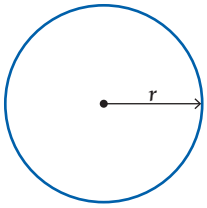
Triángulos

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\theta$$



Círculos

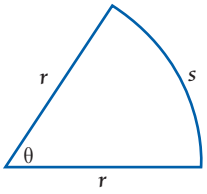
$$\text{Área} = \frac{1}{2}r^2\theta \quad s = r\theta$$



Sector de círculos

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

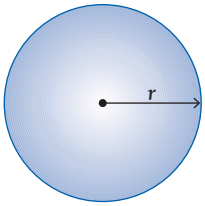
$$\text{Área} = 4\pi r^2$$



Esfera

$$\text{Área} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

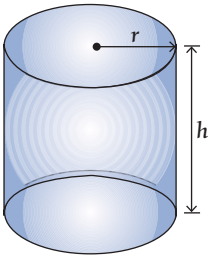
$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$



Cilindro

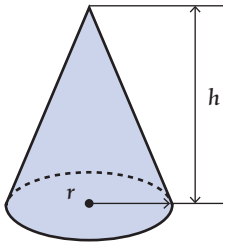
$$\text{Área} = 2^1 rh + 2^1 r^2$$

$$\text{Volumen} = 2^1 r^2 h$$



Cono

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



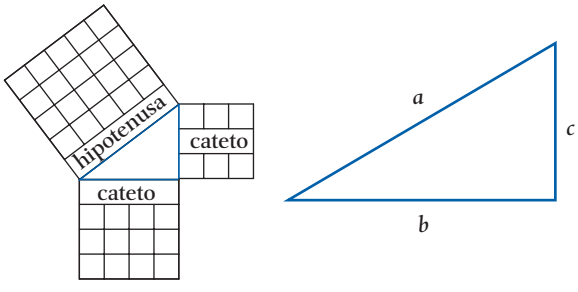
Trigonometría

TEOREMA DE PITÁGORAS

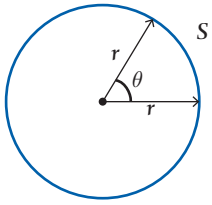
En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$



SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

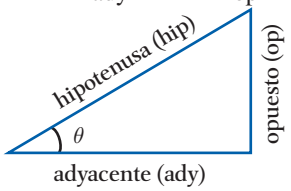


DEFINICIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

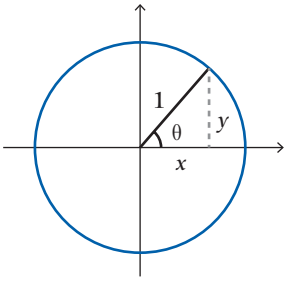
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \quad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \quad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \quad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$



CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO



LEYES DE SENOS Y COSENOS

Ley de senos. Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

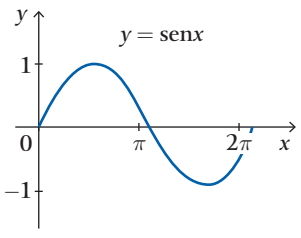
Ley de cosenos. Es igual a la suma de los cuadrados de los lados que lo forman menos el cuadrado del lado opuesto, todo dividido entre dos veces el producto de los lados que lo forman:

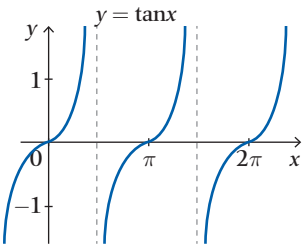
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

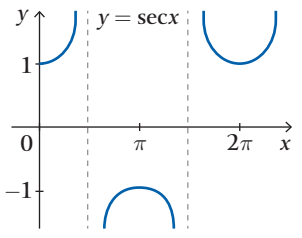
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

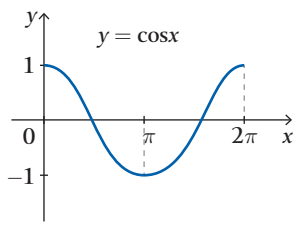
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

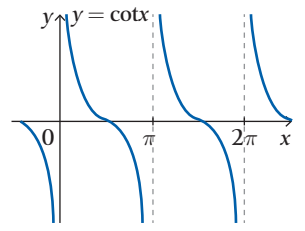
GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

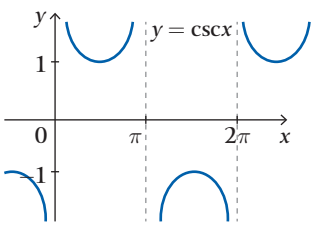












Con una sólida propuesta metodológica que la ubica como líder en el mercado, la nueva edición de **Competencias+Aprendizaje+Vida** refuerza los aspectos que la han consolidado como una serie confiable que cubre al 100% el programa de estudios de cada materia de la DGB-SEP.

Su propósito es facilitar la transición de estudiantes y docentes al nuevo modelo educativo, a través de una propuesta innovadora y vanguardista que contribuye a la formación integral de los estudiantes, fortaleciendo los cuatro pilares que marca la Unesco: *aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser*.

Gracias a la retroalimentación de docentes, especialistas y alumnos de numerosas instituciones, se logró diseñar una herramienta que facilita la experiencia de enseñanza-aprendizaje, cuyas propuestas están encaminadas a que el estudiante logre el aprendizaje esperado para cada asignatura, aplique en su vida cotidiana los conocimientos de las diferentes disciplinas y emplee las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC), además de poner especial atención al desarrollo de sus habilidades socioemocionales, promover el trabajo entre pares, favorecer la inclusión y la equidad, así como la responsabilidad y liderazgo compartidos.

A los docentes, la estructura de los libros les permitirá identificar con facilidad los objetivos que marca el programa de estudio; además, encontrarán contenidos óptimos para los diversos estilos de aprendizaje de los alumnos, recursos didácticos y proyectos adicionales, así como sugerencias para emplear las TIC dentro y fuera del salón de clases.

Con todos estos recursos queremos contribuir para que alumnos y maestros practiquen nuevas formas de aprender y de relacionarse, en las que se requieren herramientas pedagógicas y tecnológicas que permitan adquirir conocimientos de diversas áreas y que, al mismo tiempo, hagan más atractivo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-4421-3

90000

9 786073 244213